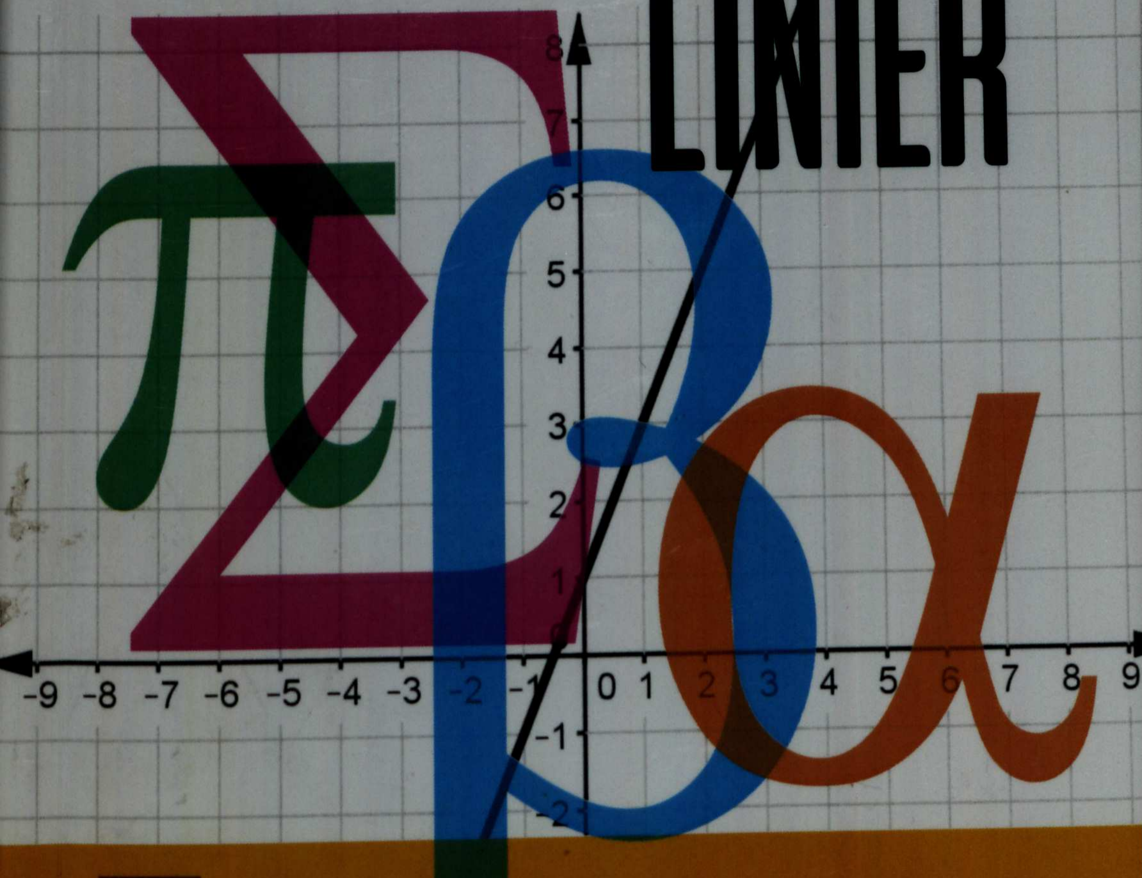
MATRIKS & TRANSFORMASI LINIER



ISMAIL HUSEIN • RINA FILIA SARI • HARI SUMARDI

MATRIKS & TRANSFORMASI LINIER

MATRIKS & TRANSFORMASI LINIER

Ismail Husein

Rina Filia Sari

Hari Sumardi

KENCANA

MATRIKS DAN TRANSFORMASI LINIER
Edisi Pertama

Perpustakaan Nasional: Katalog Dalam Terbitan (KDT)
ISBN 978-602-422-070-9
15 x 23 cm
x, 198 hlm
Cetakan ke-1, Desember 2017

Kencana. 2017.0859

Penulis
Ismail Husein
Rina Filia Sari
Hari Sumardi

Editor
MHD. Furqan

Desain Sampul
Irvan Fahmi

Penata Letak
Suwito

Penerbit
PRENADAMEDIA GROUP
(Divisi Kencana)
Jl. Kebayunan No. 1
Tapos – Cimanggis, Depok 16457
Telp.: (021) 290-63243 Faks.: (021) 475-4134

Divisi dari PRENADAMEDIA GROUP
e-mail: pmg@prenadamedia.com
www.prenadamedia.com
INDONESIA

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur dengan mengucapkan Alhamdulillah yang telah memerintahkan manusia untuk membaca, sesuai dengan firmannya surah *al-'Alaq* (1-4). Bacalah dengan (menyebut) nama Tuhanmu yang Menciptakan. Dia Telah menciptakan manusia dari segumpal darah. Bacalah, dan Tuhanmulah yang Maha pemurah. Yang mengajar (manusia) dengan perantaraan kalam. Membaca merupakan suatu perintah yang pertama kali diturunkan kepada Nabi Muhammad SAW. Artinya di satu sisi bahwa di mana pun, kapan pun kita dituntut membaca untuk mendapatkan pengetahuan dalam menemukan cahaya-Nya demi mendapatkan petunjuk dari-Nya.

Keselamatan dan salam semoga tetap tercurah kepada teladan kita yang memberikan banyak pengaruh dalam kehidupan kita. Bahwa hanya dengan mengaktualisasikan cara hidup Rasul dalam setiap langkah kita, dalam setiap pikiran, maka setiap kita akan menjadi rahmat kapan pun dan di mana pun.

Buku ini bertujuan membahas secara sederhana mengenai matriks dan transformasi linier. Buku disajikan dengan bahasa yang mudah dipahami oleh mahasiswa, sehingga mahasiswa diharapkan lebih mampu dalam berakselerasi dalam mengerjakan soal. Buku ini juga memberikan pengerjaan materi matriks dan transformasi linier dengan menggunakan aplikasi MATLAB, yang hal tersebut sangat jarang disajikan dalam buku lain yang berkenaan dengan matriks.

Buku ini juga menyajikan beberapa soal atau latihan bagi siswa disetiap akhir bab. Dengan adanya penyajian dengan aplikasi MATLAB tersebut mahasiswa bisa membuktikan beberapa permasalahan dalam pengerjaan soal dan diharapkan mahasiswa lebih bisa mendapat pengalaman sehingga bisa membuat algoritma dalam menyelesaikan masalah dalam matriks dan transformasi linier.

Terima kasih saya ucapkan kepada orangtua saya yang begitu mendukung kegiatan akademis, sehingga dengan adanya buku ini mungkin bisa membayar tetesan keringat yang selama ini telah berjuang untuk keluarga.

Terima kasih juga buat guru dan dosen saya yang begitu besar memotivasi saya untuk menjadi orang yang berguna bagi umat dan bangsa.

Pada akhirnya saya pribadi memohon ampun kepada Allah SWT dari segala kehilafan yang sangat mungkin terselip dalam buku ini. Semua kreativitas yang ada dalam buku ini hanyalah *zhann* (dugaan) berdasarkan sumber-sumber yang ada. Kebenarannya hanya Allah yang tahu. Semoga buku atau wacana mengenai matriks dan transformasi linier terus berkembang dan mengikuti perkembangan zaman yang semakin canggih dan modern.

Penulis

PENGANTAR EDITOR

Puji syukur ke hadirat Allah SWT atas izin-Nya penulisan buku ini akhirnya dapat diselesaikan dengan baik. Buku *Matriks dan Transformasi Linear* ini suatu karya akademik. Dengan motivasi membantu para mahasiswa sebagai generasi pembelajar untuk memahami baik teori dan latihan yang ada disesuaikan dengan materi perkuliahan. Agar para mahasiswa menguasai konsep bidang matriks dan transformasi linear dan mempunyai keterampilan secara teoretis dan mendalam, mampu mengaplikasikan, mengkaji, membuat desain, dan menyelesaikan masalah terkait materi yang ada di buku ini.

Lalu dibuat dengan semangat dan kolaborasi dari penulis buku, yakni Ismail Husein, Rina Filia Sari, dan Hari Sumardi untuk meluangkan waktu menulis buku ini. Dan setidaknya buku ini menjadi sumbangsih dalam aktivitas akademik yang sesuai tuntutan dari perkembangan ilmu pengetahuan yang ada.

Akhir kata, selamat menikmati buku yang pastinya jauh dari sempurna ini. Kesempurnaan bukanlah sesuatu yang dicari dari penulis buku, yang terpenting kontribusi sebagai akademisi, menambah khazanah pengetahuan, maka buku ini salah satu bukti dedikasi penulis.

Selamat belajar. *Wassalam*.

Medan, 23 Oktober 2017

MHD. FURQAN

DAFTAR ISI

MATRIKS 1

Matriks telah dipelajari di tingkat SMA baik jurusan IPA maupun IPS. Matriks yang dipelajari meliputi jenis-jenis matriks, operasi aljabar matriks, transpose matriks, determinan dan *invers* matriks yang berukuran 2 x 2 dan 3 x 3, persamaan matriks, dan penggunaan konsep matriks untuk menyelesaikan sistem persamaan linier dua dan tiga variabel. Pada bab ini akan diulas kembali tentang jenis-jenis matriks, operasi aljabar matriks, transpose matriks, determinan dan *invers* matriks, ditambah dengan *trace* matriks, dan jenis-jenis matriks persegi. Adapun penyelesaian sistem persamaan linier akan dibahas di Bab 2.

1.1 PENGERTIAN MATRIKS

Sebelum membahas lebih jauh tentang matriks, pembaca perlu mengetahui kegunaan dari matriks. Salah satu kegunaan matriks adalah untuk menyimpan data dalam jumlah besar. Sebuah data pada tabel yang berukuran *m x n* tanpa adanya garis-garis pembatas antarbaris dan antarkolom merupakan sebuah matriks. Perhatikan tabel berikut ini.

TABEL 1.1 UANG YANG DIKELUARKAN DALAM 4 HARI

Nama	Pengeluaran (dalam ribuan rupiah)			
	Hari I	Hari II	Hari III	Hari IV
Rudi	10	8	7	6
Dedi	12	5	20	10
Rika	5	9	15	13

Dengan menghilangkan garis-garis pembatas dan huruf-huruf yang ada pada Tabel 1.1, akan diperoleh sebuah matriks B yaitu:

$$B = \begin{bmatrix} 10 & 8 & 7 & 6 \\ 12 & 5 & 20 & 10 \\ 5 & 9 & 15 & 13 \end{bmatrix}.$$

Berikut ini diberikan definisi matriks secara umum agar pembaca dapat memahami.

Definisi 1.1 *Matriks adalah kumpulan dari angka-angka (elemen atau entri yang berupa bilangan real atau kompleks) yang disusun pada m baris dan n kolom sehingga membentuk sebuah persegi panjang yang berukuran m x n yang diapit oleh kurung siku.*

Berdasarkan Definisi 1.1, matriks B yang merupakan representasi dari Tabel 1.1 terdiri dari 3 baris dan 4 kolom. Sehingga matriks B berukuran 3 x 4. Ukuran dalam matriks sering disebut sebagai ordo. Jadi, matriks B dapat dikatakan berordo 3 x 4.

Secara umum sebuah matriks $A = [a_{ij}]$ (entrinya a_{ij}) yang berukuran $m \times n$ dengan $i = 1, 2, \ldots, m$ dan $j = 1, 2, \ldots, n$ dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}. \qquad (1.1)$$

Entri a_{11} menyatakan entri pada baris ke-1 dan kolom ke-1, entri a_{2n} menyatakan entri pada baris ke-2 dan kolom ke-n. Sehingga bentuk a_{ij} menyatakan entri pada baris ke-i dan kolom ke-j.

Sebuah matriks A dikatakan matriks persegi (bujursangkar) jika pada (1.1) harga $m = n$. Sehingga matriks A adalah matriks persegi yang berukuran $n \times n$. Jika pada (1.1) harga $m = 1$ dan $n \geqslant 2$, maka matriks A disebut sebagai matriks baris (vektor baris) yang berukuran 1 x n. Jika pada (1.1) harga $n = 1$ dan $m \geqslant 2$, maka matriks A disebut sebagai matriks kolom (vektor kolom) yang berukuran m x 1.

Contoh 1.1 Matriks A, B, dan C berikut berturut-turut merupakan matriks persegi, matriks baris dan matriks kolom.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & 10 & 3 \\ 7 & 6 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \end{bmatrix}. \qquad \square$$

Sebuah matriks disebut sebagai **matriks nol**, jika seluruh entri pada matriks tersebut adalah nol dan biasanya dinotasikan dengan nol. Misalkan matriks nol berukuran 2 x 2 yaitu $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Dua buah matriks A dan B dikatakan sama, ditulis $A = B$, jika kedua matriks ini mempunyai ukuran yang sama dan entri-entri yang bersesuaian sama nilainya.

Contoh 1.2 Tentukan nilai a, b, dan c sedemikian rupa sehingga :

$$\begin{bmatrix} a+b & b-3c \\ 2a & 4a+2c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan definisi kesamaan matriks, maka keempat entri yang bersesuaian haruslah sama. Dengan demikian:

$$a + b = 3 \qquad b - 3c = -7 \qquad 2a = 2 \qquad 4a + 2c = 10.$$

Dengan menyelesaikan sistem persamaan di atas akan diperoleh $a = 1$, $b = 2$, dan $c = 3$. $\square$

LATIHAN 1.1

1. Berikanlah 5 buah contoh matriks untuk masing-masing matriks yang berukuran 3 x 3, 4 x 5, 5 x 5, 5 x 1, dan 1 x 6.
2. Diketahui matriks

$$A = \begin{bmatrix} -7 & 4 & 6 & 0 & 9 \\ 11 & 0 & 12 & 4 & 15 \\ 9 & 2 & 10 & -4 & 6 \\ -13 & 4 & 7 & 8 & 16 \\ 10 & 14 & 8 & -9 & 5 \end{bmatrix}.$$

   Tentukanlah:
   (a) ukuran matriks A.
   (b) entri a_{32} dan a_{43}.
   (c) nilai $\sum_{i=1}^{5} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} + a_{55}$
   (d) nilai $\prod_{i=1}^{5} a_{ii} = a_{11} \times a_{22} \times a_{33} \times a_{44} \times a_{55}$
3. Diketahui matriks:

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & -3 & 7 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

   Perlihatkan bahwa:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} b_{ij} = \sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{3} b_{ij}.$$

4. Untuk sembarang skalar k dan sebuah matriks A yang berukuran $m \times n$, di mana $m, n \geqslant 3$, buktikan bahwa:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} a_{ij} = \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{3} a_{ij}$$

dan

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} k.a_{ij} = k\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{3} a_{ij}.$$

5. Tentukan nilai a, b, dan c sedemikian hingga:

(a) $\begin{bmatrix} 2-a & 7-2b \\ a-b+c & c-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -6 & -10 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} a+b & b-c & a-1 \\ 5a-2c & 2 & 2b-c \\ a+b+c & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2c-3b \\ -1 & 2c-4 & 1 \\ 6 & 5a-7 & a+b-2c \end{bmatrix}$

1.2 OPERASI ALJABAR MATRIKS

1.2.1 Penjumlahan Matriks

Penjumlahan dua buah matriks merupakan operasi dasar yang pertama sekali harus diketahui pembaca. Dua buah matriks dapat dijumlahkan ataupun dikurangkan bilamana kedua matriks tersebut memiliki ukuran yang sama. Berikut ini diberikan definisi tentang penjumlahan dua buah matriks.

Definisi 1.2 *Andaikan A dan B adalah dua buah matriks yang mempunyai ukuran yang sama. Jumlah dari A dan B, ditulis A + B, adalah matriks yang diperoleh dengan menjumlahkan entri-entri yang bersesuaian dari kedua matriks tersebut. Apabila tidak mempunyai ukuran yang sama, maka matriks-matriks tersebut tidak dapat dijumlahkan (tak terdefinisi).*

Misalkan $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ adalah dua buah matriks yang berukuran $m \times n$, maka:

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}. \tag{1.2}$$

Pada pengurangan dua buah matriks A dan B, nilai dari $A - B = A + (-B)$. Untuk lebih memahami tentang penjumlahan dua buah matriks atau lebih, perhatikan Contoh 1.3.

Contoh 1.3 Bila diketahui matriks-matriks:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \\ 10 & 7 & -8 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Tentukanlah:

(a) $A+B$

(b) $A+C$

(c) $B+C$

(d) $C-A$

Untuk menjawab (a) lihat terlebih dahulu ukuran matriks A yaitu 3 x 3, dan ukuran matriks B yaitu 2 x 3. Ukuran matriks A dan B tidaklah sama. Berdasarkan Definisi 1.2, $A + B$ tidak dapat dijumlahkan (tak terdefinisi), begitu pula untuk persoalan (c). Sekarang untuk persoalan (b) dan (d),

(b) $$A+C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \\ 10 & 7 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 3+3 & -1+4 & 2+5 \\ 5+2 & 1+1 & 4+4 \\ 10+(-2) & 7+4 & -8+(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 7 \\ 7 & 2 & 8 \\ 8 & 11 & -11 \end{bmatrix}.$$

(d) $$C-A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \\ 10 & 7 & -8 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 3-3 & 4-(-1) & 5-2 \\ 2-5 & 1-1 & 4-4 \\ -2-10 & 4-7 & -3-(-8) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \\ -3 & 0 & 0 \\ -12 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

□

1.2.2 Perkalian Matriks

Pada bagian ini, pertama sekali akan kita bahas tentang perkalian skalar matriks. Pengertian perkalian skalar matriks secara sederhana adalah perkalian antara bilangan skalar dengan sebuah matriks. Untuk lebih jelasnya, perhatikan Definisi 1.3 berikut ini.

Definisi 1.3. *Jika terdapat matriks $A = [a_{ij}]$ dan suatu bilangan skalar k. Perkalian k.A merupakan perkalian antara k dengan setiap entri matriks A, atau dapat ditulis $kA=[k.a_{ij}]$.*

Dari Definisi 1.3, penulisan k.A bila matriks A berukuran $m \times n$, yaitu:

$$kA=\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{ml} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{bmatrix}. \qquad (1.3)$$

Untuk lebih jelasnya tentang perkalian skalar matriks, perhatikan Contoh 1.4.

Contoh 1.4 Misalkan matriks $A=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ dan matriks $B=\begin{bmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 2 & -3 & 7 \end{bmatrix}$. Maka:

$$5A=5\begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5(-1) & 5(2) & 5(5) \\ 5(1) & 5(0) & 5(3) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5 & 10 & 25 \\ 5 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

$$2B=2\begin{bmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 2 & -3 & 7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2(3) & 2(4) & 2(-5) \\ 2(2) & 2(-3) & 2(7) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 8 & -10 \\ 4 & -6 & 14 \end{bmatrix}$$

$$2B-5A=\begin{bmatrix} 6 & 8 & -10 \\ 4 & -6 & 14 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -5 & 10 & 25 \\ 5 & 0 & 15 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 11 & -2 & -35 \\ -1 & -6 & -1 \end{bmatrix} \qquad \square$$

Dari Contoh 1.3 dan 1.4, kita dapat memahami tentang penjumlahan dua buah matriks dan hasil kali skalar sebuah matriks. Terdapat beberapa sifat dasar pada operasi penjumlahan dua buah matriks atau lebih dan perkalian skalar matriks, yakni yang termuat dalam Teorema 1.4.

Teroma 1.4 *Perhatikan sembarang matriks A, B, dan C (dengan ukuran yang sama) dan sembarang skalar k dan k'. Maka:*

(i) $(A + B) + C = A + (B + C)$,

(ii) $A + 0 = 0 + A = A$

(iii) $A + (-A) = -A + A = 0$

(iv) $A + B = B + A$

(v) $k(A + B) = kA + kB$

(vi) $(kk')A = k(k'A)$

(vii) $1.A = A$

Bukti diserahkan kepada pembaca sebagai latihan. Anggaplah matriks A, B, dan C berukuran $m \times n$; dan 0 pada (ii) dan (iii) merupakan matriks 0 berukuran $m \times n$. Kemudian kita berpatokan pada Definisi 1.2 dan 1.3.

Contoh 1.5. Diketahui $A=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan $C=\begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$. Perlihatkanlah bahwa Teorema 1.4 (i) dan (v) terpenuhi. Pertama kita perlihatkan bahwa (i) terpenuhi. Pada ruas kiri:

$$(A+B)+C=\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5 & 13 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$$

Dan pada ruas kanan:

$$A+(B+C)=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}\right)$$
$$=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -6 & 9 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5 & 13 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$$

Karena hasil $(A + B) + C = A + (B + C)$, maka (*i*) terpenuhi.

Selanjutnya kita perlihatkan bahwa (*v*) terpenuhi. Pada ruas kiri

$$k(A+B)=k\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$
$$=k\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -k & 7k \\ 2k & 0 \end{bmatrix}$$

Dan pada ruas kanan:

$$kA+kB=k\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}+k\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} k & 4k \\ 2k & -k \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -2k & 3k \\ 0 & k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -k & 7k \\ 2k & 0 \end{bmatrix}$$

Karena $k(A + B) = kA + kB$, maka (*v*) terpenuhi. $\square$

Selanjutnya akan kita bahas tentang perkalian dua buah matriks. Perhatikan definisi berikut.

Definisi 1.5 *JIka A adalah matriks yang berukuran m x n dan B adalah matriks berukuran n x p. Perkalian A dan B, ditulis AB, adalah matriks yang berukuran m x p, di mana entri pada baris i dan kolom j dari AB ditentukan sebagai berikut. Pilihlah baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B. Kemudian kalikan entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut bersama-sama. Selanjutnya tambahkan keseluruhan hasil kalinya.*

Secara sederhana, dapat kita katakan bahwa perkalian dua buah matriks A dan B yaitu AB adalah perkalian antara baris dari matriks A dengan kolom dari matriks B. Misalkan diberikan dua buah matriks, yaitu $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ dan $B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$. Untuk mencari matriks AB, ada beberapa langkah yang perlu kita diperhatikan, yakni:

(1) Kalikan baris pertama matriks A dengan kolom pertama dari matriks B.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}$$

(2) Kalikan baris pertama matriks A dengan kolom kedua dari matriks B.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ \square & \square \end{bmatrix}.$$

(3) Setelah selesai kita kalikan baris pertama matriks A dengan seluruh kolom pada matriks B. Langkah selanjutnya, kita kalikan baris kedua matriks A dengan kolom pertama dari matriks B.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & \square \end{bmatrix}$$

(4) Terakhir kita kalikan baris kedua matriks A dengan kolom kedua dari matriks B.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

Tanda □ memberikan arti bahwa entrinya belum diketahui atau belum dicari. Keempat langkah di atas dapat kita gunakan sebagai sebuah pedoman dalam mencari perkalian dua buah matriks.

Dari Definisi 1.5, perkalian dari dua buah matriks yaitu A dan B yang masing-masing berukuran m x n dan n x p dapat diilustrasikan sebagai berikut:

$$\begin{array}{ccccccc} A & \times & B & = & AB & \longrightarrow & \text{matriks} \\ m \times n & & n \times p & & m \times p & \longrightarrow & \text{ukuran} \end{array}$$

sama

Contoh 1.6. Carilah matriks AB, jika $A = [(1\ \ -2\ \ 4)]$, dan $B=\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Karena matriks A berukuran 1 x 3 dan matriks B berukuran 3 x 1, dari Definisi 1.5 matriks AB akan berukuran 1 x 1. Oleh karena itu, kita peroleh:

$$AB=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}=\left[1(4)+(-2)(2)+(4)(-1)\right]=[-4].$$

Contoh 1.6 memperlihatkan perkalian antara matriks yang berukuran 1 x 3 dan 3 x 1. Dari Definisi 1.5, anggapaplah $A = [(a_{ik})]$ dan $B = [(b_{kj})]$ adalah matriks-matriks yang masing-masing berukuran m x n dan n x p. Jika hasil kali $AB = C$, maka matriks C dapat ditulis sebagai:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1p} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & c_{ij} & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{m1} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Di mana $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$

Catatan: Perkalian AB tidak dapat didefinisikan jika A adalah matriks yang berukuran m x p dan B adalah matriks yang berukuran q x s, di mana $p \neq q$.

Contoh 1.7 Tentukan AB dan BA jika diketahui:

(a) $A=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ dan $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Pertama kita cari perkalian AB. Karena A berukuran 2 x 2 dan B berukuran 2 x 3, maka AB akan berukuran 2 x 3. Untuk memperoleh baris pertama dari AB, kalikan baris pertama yaitu [4,1] dari A secara berturut-turut dengan tiap kolom dari B, yaitu:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Sehingga:

$$AB=\begin{bmatrix} 4(1)+1(3) & 4(2)+1(1) & 4(0)+1(3) \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} 7 & 9 & 3 \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

Untuk memperoleh baris kedua dari AB, kalikan baris kedua [-2, -3] dari A dengan tiap-tiap kolom dari B. Sehingga:

$$AB=\begin{bmatrix} 7 & 9 & 3 \\ -2+(-9) & -4+(-3) & 0+(-9) \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} 7 & 9 & 3 \\ -11 & -7 & -9 \end{bmatrix}$$

Untuk perkalian BA, tidak dapat didefinisikan. Berikan pendapat Anda mengapa demikian?

(b) $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -3\end{bmatrix}$ dan $B=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -3 & 2\end{bmatrix}$. Dengan melakukan serangkaian langkah seperti bagian (*a*), kita peroleh:

$$AB=\begin{bmatrix}3+0 & -1+0\\ 6+9 & -2-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 15 & -8\end{bmatrix}\text{dan}$$

$$BA=\begin{bmatrix}3-2 & 0+3\\ -3+4 & 0-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & -6\end{bmatrix}$$ □

Pada Contoh 1.7(b) di atas menunjukkan bahwa pada perkalian matriks tidak bersifat komutatif, yaitu hasil kali *AB* dan *BA* tidak selalu sama. Namun demikian, perkalian matriks memenuhi sifat-sifat berikut ini.

Teorema 1.6 *Jika A, B, dan C adalah tiga buah matriks dengan ukuran tertentu sedemikian sehingga operasi penjumlahan dan perkaliannya terdefinisi. Maka sifat-sifat berikut akan terpenuhi.*

(i) (AB)C = A(BC) (hukum asosiatif),

(ii) A(B + C) = AB + AC (hukum distributif kiri),

(iii) (B + C)A = BA + CA (hukum distributif kanan),

(iv) k(AB) = (kA)B = A(kB), di mana k adalah skalar.

Bukti. (iii) Karena pada ruas kiri terdapat operasi $B + C$, agar terdefinisi maka B dan C haruslah mempunyai ukuran yang sama, anggaplah ukurannya $m \times n$. Sekarang anggaplah matriks A berukuran $n \times p$ agar perkalian $(B + C)A$ terdefinisi. Andaikan $(B + C)A = D$, maka entri-entri dari D yaitu:

$$\begin{aligned} d_{ij} &= (b_{i1}+c_{i1})a_{1j}+(b_{i2}+c_{i2})a_{2j}+\cdots+(b_{in}+c_{in})a_{nj}\\ &= \sum_{k=1}^{n}(b_{ik}+c_{ik})a_{kj} \end{aligned} \tag{1.5}$$

Pada bilangan real berlaku sifat distributif kiri dan kanan, yaitu $a(b + c) = AB + ac$ dan $(b + c)a = BA + CA$. Karena entri-entri pada matriks berupa bilangan real, maka pada persamaan (1.5) menjadi

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \sum_{k=1}^{n}(b_{ik}+c_{ik})a_{kj}=\sum_{k=1}^{n}(b_{ik}a_{kj}+c_{ik}a_{kj})\\ &= (b_{i1}a_{1j}+c_{i1}a_{1j})+(b_{i2}a_{2j}+c_{i2}a_{2j})+\cdots+(b_{in}a_{nj}+c_{in}a_{nj})\\ &= (b_{i1}a_{1j}+b_{i2}a_{2j}+\cdots+b_{in}a_{nj})\\ &\quad+(c_{i1}a_{1j}+c_{i2}a_{2j}+\cdots+c_{in}a_{nj}) \end{aligned}$$

Bentuk terakhir menyatakan entri-entri pada matriks $BA + CA$, sehingga bukti telah komplet. ■

Sebuah matriks persegi A dapat dipangkatkan menjadi A^n, dengan n adalah suatu bilangan bulat. Perpangkatan dari matriks A harus memenuhi aturan berikut.

(1) $A^0 = I$, di mana I adalah matriks identitas (lihat bagian 1.3.3)

(3) $A^2 = A.A.$

(3) $A^3 = A^2.A.$

(4) $A^m.A^n = A^{m+n}$

(5) $A^{-m} = (A^{-1})^m = (A^m)^{-1}$, di mana A^{-1} merupakan *invers* dari matriks A yang akan kita bahas pada bagian selanjutnya.

Contoh 1.8 Diberikan matriks persegi $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$. Maka perpangkatan A^2 adalah:

$$A^2 = A.A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 10\\ 15 & 22\end{bmatrix};$$

Dan A^3 adalah

$$A^3 = A^2.A=\begin{bmatrix}7 & 10\\ 15 & 22\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}37 & 54\\ 81 & 118\end{bmatrix}$$

Sebagai latihan bagi pembaca, carilah A^5 di mana $A^5 = A^3.A^2$ atau $A^5 = A^2.A^3$. Apakah bentuk $A^3.A^2 = A^2.A^3$?

Contoh 1.9 Jika diketahui *invers* dari sebuah matriks A yaitu $A^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 0\end{bmatrix}$, maka $A^{-2}=\left(A^{-1}\right)^2=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 6\\ -2 & -3\end{bmatrix}$ □

1.2.3 Transpose Matriks

Untuk sembarang matriks dikenal istilah transpose matriks. Transpose sering digunakan bersama dengan penjumlahan dan perkalian matriks. Definisinya sebagai berikut.

Definisi 1.7 *Misalkan A adalah sembarang matriks yang berukuran m x n, transpose dari matriks A, ditulis A^T, adalah matriks yang berukuran n x m yang diperoleh dengan cara menuliskan kolom-kolom dari A sebagai baris-baris dari A^T, secara berurutan.*

Dalam kalimat yang sederhana, transpose dapat diartikan dengan menukarkan baris menjadi kolom atau menukarkan kolom menjadi baris. Agar pembaca lebih memahami tentang transpose suatu matriks, perhatikanlah contoh berikut.

Contoh 1.10 Misalkan matriks $A = [3 \;\; 2 \;\; -1]$, maka transpose dari matriks A adalah:

$$A^T = \begin{bmatrix}3 & 2 & -1\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}3\\2\\-1\end{bmatrix}.$$

Jika matriks $B = \begin{bmatrix}-2 & 1\\-1 & 4\\-3 & 2\end{bmatrix}$, maka $B^T = \begin{bmatrix}-2 & 1\\-1 & 4\\-3 & 2\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}-2 & -1 & -3\\1 & 4 & 2\end{bmatrix}$. □

Teorema berikut memperlihatkan sifat-sifat dasar dari transpose suatu matriks. Sifat-sifat dari transpose ini nantinya dapat digunakan pada pokok pembahasan selanjutnya.

Teorema 1.8 *Misalkan A dan B adalah matriks dan k adalah skalar. Maka transpose dari jumlah dan hasilkali matriks-matriks tersebut dapat didefinisikan sebagai berikut:*

(i) $(A+B)^T = A^T + B^T$ *(iii)* $(kA)^T = kA^T$

(ii) $(A^T)^T = A$ *(iv)* $(AB)^T = B^T A^T$

Bukti. (ii) Misalkan matriks $A = [a_{ij}]$ berukuran $m \times n$ yang berbentuk:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

Misalkan $B = A^T$ (transpose dari matriks A). Dari Definisi 1.7, kolom pertama dari matriks A yaitu $[a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}]$ menjadi baris pertama dari matriks B, kolom kedua dari matriks A akan menjadi baris kedua dari matriks B, begitu seterusnya hingga kolom ke-n dari matriks A menjadi baris ke-n dari matriks B, sehingga matriks B berukuran $n \times m$. Dengan melakukan serangkaian langkah yang sama, transpose dari matriks B yaitu $B^T = (A^T)^T = A$. ∎

Catatan: Berdasarkan Teorema 1.8(iv), transpose dari sebuah hasilkali adalah hasil kali dari transpose-transposenya, tetapi dalam urutan yang terbalik.

1.2.4 Diagonal dan Trace

Pada bagian 1.1, kita telah mengetahui bahwa matriks persegi atau matriks bujursangkar merupakan matriks yang berukuran $n \times n$. Atau dapat dikatakan bahwa matriks persegi berordo n. Sebuah matriks persegi $A = [a_{ij}]$ yang berukuran $n \times n$, secara umum dapat ditulis sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

Entri-entri $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ disebut sebagai diagonal atau diagonal utama.

Definisi 1.9 *Misalkan A adalah matriks persegi yang berukuran n x n. Trace dari A, ditulis tr(A), adalah jumlah dari elemen-elemen pada diagonal utamanya.*

Dari Definisi 1.9, *trace* dari matriks dapat dituliskan sebagai:

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

Contoh 1.11 Diberikan matriks:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0\\ 4 & 1 & -4 & 4\\ 5 & 6 & -5 & 5\\ 4 & 7 & -1 & 2\end{bmatrix}, \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -3 & 3\\ 1 & -1 & -5 & 2\\ 7 & 8 & -1 & 1\\ 6 & 1 & 2 & 4\end{bmatrix}$$

maka:

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} = 2 + 1 - 5 + 2 = 0,$$

dan:

$$\mathrm{tr}(B) = b_{11} + b_{22} + b_{33} + b_{44} = 5 - 1 - 1 + 4 = 7.$$

Pada Teorema berikut ini, terdapat sifat-sifat trace dari suatu matriks persegi.

Teorema 1.10 *Misalkan* $A = [a_{ij}]$ *dan* $B = [b_{ij}]$ *adalah matriks persegi (bujursangkar n) dan k adalah saklar. Maka:*

(i) $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$

(ii) $tr(kA) = k\,tr(A)$

(iii) $tr(A^T) = tr(A)$

(iv) $tr(AB) = tr(BA)$

Bukti. (ii) Diagonal utama pada perkalian skalar matriks kA adalah:

$$[ka_{11}, ka_{22}, \ldots, ka_{nn}].$$

Sehingga:

$$\begin{aligned} tr(kA) &= ka_{11} + ka_{22} + \cdots + ka_{nn} \\ &= k(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}) = k.tr(A). \end{aligned}$$

Selanjutnya (iii) pada transpose matriks A, yaitu A^T, entri-entri pada diagonal utama tidak berubah. Sehingga $tr(A^T) = tr(A)$. ∎

Untuk memahami sifat-sifat trace yang ada pada Teorema 1.10, perhatikanlah contoh berikut.

Contoh 1.12 Dari matriks-matriks A dan B pada Contoh 1.11, tentukanlah:

(a) $tr(A + B)$

(b) $tr(AB)$

Untuk mencari (*a*) gunakan Teorema 1.10(i). Dari Contoh 1.11, telah diperoleh $tr(A) = 0$ dan $tr(B) = 7$ sehingga $tr(A + B) = tr(A) + tr(B) = 0 + 7 = 7$. Untuk mencari (*b*), cari terlebih dahulu hasilkali AB, kemudian carilah $tr(AB)$. □

LATIHAN 1.2

1. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -10 & -3 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -4 & 7 & -2 \end{bmatrix}$ dan $D = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$. Manakah operasi di bawah ini yang terdefinisi?

   (a) $A + B$
   (b) $A - 2C$
   (c) $2C - D^T$
   (d) $A^T C$
   (e) $DC + 2AB$
   (f) $(3A-2B)C$
   (g) $DA^T + B^T A^T$
   (h) $A^2 C$
   (i) $(AC)^T + D^T$
   (j) $(ABC)^T - D$

2. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 7 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & 2 \end{bmatrix}$. Tentukanlah:

   (a) $7A - 2B$
   (b) A^T dan B^T
   (c) $A^T B^T + 2AB$
   (d) $(AB)^T - (BA)^T$
   (e) $tr(3A)$
   (f) $tr(A).tr(B)$
   (g) $tr(3AB - 2A^T B^T)$
   (h) $tr(A^2 B)^T$

3. Dari soal nomor 1, perlihatkanlah bahwa $(AB)C = A(BC)$ dan $(A + B)C = AC + BC$.

4. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, dan $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Perlihatkanlah

bahwa $AB = 0$ dan $BA = \begin{bmatrix} -12 & 4 & 0 \\ -36 & 12 & 0 \\ -12 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

5. Dari soal nomor 3, perlihatkanlah bahwa $(AB)^T = B^T A^T$ dan $(BA)^T = A^T B^T$.
6. Dari soal nomor 3, perlihatkanlah bahwa $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$, $tr(A - B) = tr(A) - tr(B)$, dan $tr(AB) = tr(BA)$.
7. Misalkan matriks $A = \begin{bmatrix} a^2 & -4 & 0 & 3 & -6 \\ -1 & -a & 7 & 11 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 5 & -1 \\ 3 & 0 & -5 & 5a & 0 \\ 8 & -2 & 4 & 3 & -4 \end{bmatrix}$. Berapakah nilai a yang memenuhi $\mathrm{tr}(A) = 0$?
8. Diberikan matriks $B = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, buktikanlah bahwa perpangkatan $B^2 = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -2\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$. Kemudian carilah B^2, jika $\theta = \pi/4$ dan $\theta = \pi/2$.
9. Diketahui $P = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, tentukanlah P^{10}. Kemudian gunakan pola yang terbentuk untuk menentukan P^{2016}.
10. Misalkan sebuah matriks kompleks $A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$, di mana i adalah bilangan imajiner, $i = \sqrt{-1}$, dan $i^2 = -1$. Berikan sebuah hasil yang mungkin dari perpangkatan A^n, di mana n adalah bilangan asli. (Catatan: gunakan pola yang diperoleh dari perpangkatan A^1, A^2, A^3, dan seterusnya).
11. Diberikan matriks $A = [a_{ij}]$ yang berukuran 8 x 8 dengan:

    $$a_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{jika } i = j. \\ 0, & \text{jika } i \neq j. \end{cases}$$

    Perlihatkan bahwa $tr(3A) = 48$. Kemudian jika A berukuran $n \times n$, carilah sebuah formula (rumus) untuk menentukan $tr(kA)$, di mana k adalah skalar.
12. Buktikan Teorema 1.4 (v) dan (vi). Untuk mempermudah pembuktian, anggaplah matriks A dan B memiliki ukuran $m \times n$.
13. Buktikan Teorema 1.6 (ii) dengan memodifikasi bukti (iii).
14. Buktikan Teorema 1.8 (iii) dan (iv). (Catatan: untuk membuktikan (iii) misalkan matriks A berukuran $m \times n$. Untuk membuktikan (iv) terlebih dahulu definisikan ukuran dari matriks A dan B sedemikian sehingga AB terdefinisi).
15. Jika A dan B adalah dua buah matriks sedemikian sehingga $A + B$ terdefinisi, maka buktikan bahwa $k(A + B)^T = kA^T + kB^T$.

16. Buktikan Teorema 1.10 (i) dan (iii). (Catatan: untuk membuktikan (i), definisikan $A + B$ terlebih dahulu).

1.3 BEBERAPA JENIS MATRIKS PERSEGI

Pada bagian 1.1, kita telah mengetahui tentang matriks persegi. Matriks persegi adalah matriks yang berukuran $n \times n$. Beberapa matriks persegi yang akan dibahas pada bagian ini yaitu matriks diagonal, matriks identitas, matriks skalar, matriks segitiga, matriks yang dapat dibalik, dan matriks simetris.

1.3.1. Matrik diagonal

Pada bagian ini akan kita bahas tentang matriks diagonal. Perhatikan definisi berikut.

Definisi 1.11. *Suatu matriks persegi $D = [d_{ij}]$ dikatakan sebagai matriks diagonal, jika entri-entri selain diagonal utamanya adalah 0.*

Dari Definisi 1.11, matriks diagonal $D = [d_{ij}]$ secara umum dapat dituliskan sebagai:

$$D = \left.\overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}^{n}\right\} n \tag{1.7}$$

Namun nantinya penulisan matriks diagonal akan ditulis sebagai:

$$D = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}). \tag{1.8}$$

Contoh 1.13. Matriks diagonal $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ dan dapat dituliskan sebagai $A = \operatorname{diag}(1, -1)$ dan $B = diag(4, 0, 3)$. □

1.3.2 Matriks Identitas

Dari bentuk (1.7), jika pada diagonal utama $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn} = 1$, maka disebut sebagai matriks identitas atau matriks satuan. Untuk lebih jelasnya perhatikan definisi berikut.

Definisi 1.12 *Sebuah matriks identitas, dinotasikan dengan I_n, atau disingkat dengan I, adalah sebuah matriks persegi di mana entrinya bernilai 1 pada diagonal utamanya dan bernilai 0 pada entri yang lainnya.*

Dari Definisi 1.12, matriks identitas I_n dapat dituliskan secara umum sebagai berikut.

$$I_n = \left.\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}^{n}\right\} n \tag{1.9}$$

Dari bentuk (1.9), matriks identitas dapat dituliskan sebagai $I = [S_{ij}]$ di mana entri $S_{ij} = 1$, jika $i = j$ dan entri $S_{ij} = 0$, jika $i \neq j$. Agar pembaca lebih memahami tentang matriks identitas, perhatikan Contoh 1.14.

Contoh 1.14. Matriks $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, dan $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ masing-masing merupakan matriks identitas yang berukuran 2 x 2, 3 x 3, dan 4 x 4, atau dapat ditulis dengan I_2, I_3, dan I_4. □

Contoh 1.15 Jika diketahui:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \text{ dan } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Maka:

$$AI = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & -3 \end{bmatrix} = A,$$

dan:

$$IA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & -3 \end{bmatrix} = A.$$ □

Dari Contoh 1.15, dapat diambil sebuah kesimpulan seperti yang tertuang dalam teorema berikut.

Teorema 1.13 *Jika A adalah matriks persegi yang berukuran n x n dan I adalah matriks identitasnya, maka AI = IA = A.*

Dari Contoh 1.15 dan Teorema 1.13, terlihat bahwa sifat komutatif dipenuhi untuk perkalian suatu matriks dengan identitas.

1.3.3 Matriks Skalar

Matriks skalar merupakan bagian dari matriks diagonal. Suatu matriks diagonal dikatakan sebagai matriks skalar apabila pada bentuk (1.7), harga $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = k$. Untuk lebih jelasnya perhatikan definisi berikut.

Definisi 1.14 *Matriks persegi A dikatakan matriks skalar, jika matriks A dihasilkan dari perkalian skalar k dengan matriks identitas I, atau ditulis dengan A = kI.*

Secara umum, matriks skalar dari bentuk (1.7) dapat dituliskan sebagai:

$$A = kI = \left.\overbrace{\begin{bmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{bmatrix}}^{n}\right\} n \qquad (1.10)$$

Contoh 1.16 Manakah matriks di bawah ini yang merupakan matriks skalar?

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matriks *B* dan *C* merupakan matriks skalar. Adapun matriks *A* dan *D* merupakan matriks diagonal. □

1.3.4 Matriks Segitiga

Matriks segitiga dalam pengertian yang sederhana adalah matriks yang berbentuk segitiga. Matriks segitiga terbagi menjadi dua, yaitu matriks segitiga atas (*Upper Triangular*) dan matriks segitiga bawah (*Lower Triangular*). Untuk lebih jelasnya, pembaca dapat memperhatikan definisi berikut.

Definisi 1.15 *Suatu matriks persegi disebut sebagai matriks segitiga atas, jika keseluruhan entri yang berada di bawah diagonal utamanya adalah nol. Dan, bila keseluruhan entri yang berada di atas diagonal utamanya adalah nol, disebut sebagai matriks segitiga bawah.*

Secara umum, matriks segitiga atas dan matriks segitiga bawah atau *LU* dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} \ell_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \ell_{n3} & \cdots & \ell_{nn} \end{bmatrix}. \qquad (1.11)$$

Matriks *U* dan *L* masing-masing merupakan matriks segitiga atas dan bawah. Pembahasan lebih lanjut mengenai matriks *LU* akan dibahas pada bab selanjutnya. Berikut ini merupakan contoh dari matriks *LU*.

Contoh 1.17 Manakah di bawah ini yang merupakan matriks segitiga bawah dan mana pula yang merupakan matriks segitiga atas?

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriks *A* dan *B* merupakan matriks segitiga bawah, sedangkan matriks *C* merupakan matriks segitiga atas. □

1.3.5 Matriks yang Dapat Dibalik

Pada bagian ini akan kita bahas tentang matriks yang dapat dibalik (*invertible*). Berikut diberikan definisi tentang matriks yang dapat dibalik.

Definisi 1.16 *Matriks persegi A dikatakan dapat dibalik jika terdapat sebuah matriks B sedemikian hingga AB = BA = I, dan matriks B dinamakan invers dari matriks A.*

Contoh 1.18 Matriks $B = \begin{bmatrix} 3 & -11 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ merupakan *invers* dari matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, karena:

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -11 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

dan

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & -11 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Dari Definisi 1.16, karena *B* adalah *invers* dari *A*, maka *B* dapat dituliskan sebagai $B = A^{-1}$. Oleh karena itu, bentuk *AB* = *BA* = *I* dapat dinyatakan sebagai:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \tag{1.12}$$

Berikut ini diberikan bentuk *invers* dari matriks persegi yang berukuran 2 x 2. Untuk ukuran yang lebih besar, akan dibahas pada Bab 4. Misalkan A adalah sembarang matriks yang berukuran 2 x 2, katakanlah:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Maka *invers* dari matriks adalah:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \tag{1.13}$$

Di mana $ad - bc$ merupakan determinan dari matriks A atau dapat ditulis sebagai

$$\det(A) = ad - bc \tag{1.14}$$

Teorema 1.17 *Jika A dan B adalah dua buah matriks yang dapat dibalik dan memiliki ukuran yang sama, maka:*

(i) AB dapat dibalik

(ii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Bukti. (i) Karena A dan B dapat dibalik, maka akan terdapat A^{-1} dan B^{-1} sedemikian sehingga $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ dan $BB^{-1} = B^{-1}B = I$. Sekarang akan kita perlihatkan bahwa perkalian AB dapat dibalik. Dari Definisi 1.16, akan terdapat matriks C sedemikian sehingga

$$(AB)C = C(AB) = I$$

Ambil $C = B^{-1}A^{-1}$, sehingga:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = I$$

Oleh karena itu, kita simpulkan bahwa AB dapat dibalik dan *invers* dari AB adalah $B^{-1}A^{-1}$.

(i) ⇒ (ii) kalikan ruas kiri dengan AB. Oleh Definisi 1.16, kita peroleh

$$AB(AB)^{-1} = (AB)^{-1}AB = I$$

Selanjutnya kalikan juga ruas kanan dengan AB. Oleh Definisi 1.16 dan persamaan (1.12) kita peroleh:

$$(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}.I.B = B^{-1}B = I.$$

dan:

$$AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A.I.A^{-1} = AA^{-1} = I.$$

Karena perkaliannya sama-sama menghasilkan sebuah matriks identitas,

kita simpulkan $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. ■

Contoh 1.19 Diketahui matriks-matriks:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},\ AB = \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 8 & -13 \end{bmatrix}$$

Oleh persamaan (1.13) diperoleh

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix},\ B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix},\ (AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 13 & -8 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}.$$

Sehingga

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -8 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}$$

Oleh karena itu, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ seperti yang tercantum pada Teorema 1.17(ii). □

1.3.6 Matriks Simetris

Pada bagian ini akan kita bahas mengenai matriks simetris dan *skew*-simetris. Perhatikan definisi berikut.

Definisi 1.18 *Suatu matriks persegi A disebut sebagai matriks simetris bila* $A^T = A$. *Dan suatu matriks persegi A disebut sebagai matriks skew-simetris (simetris miring) bila* $A^T = -A$.

Dari Definisi 1.18, sebuah matriks persegi $A = [a_{ij}]$ dikatakan simetris, jika entri $a_{ij} = a_{ji}$. Secara umum matriks simetris A dapat dituliskan sebagai

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1.15}$$

Suatu matriks persegi $B = [b_{ij}]$ dikatakan *skew*-simetris, jika entri $b_{ij} = -b_{ji}$. Secara umum matriks *skew*-simetris B dapat dituliskan sebagai:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ -b_{12} & 0 & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ -b_{13} & -b_{23} & 0 & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b_{1n} & -b_{2n} & -b_{3n} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{1.16}$$

Dari bentuk (1.16), terlihat bahwa seluruh entri pada diagonal utama bernilai nol, atau $b_{ij} = 0$.

Contoh 1.20 Diberikan dua buah matriks yaitu:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 3 & 0 & -1 \\ 7 & -1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \\ -5 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriks A dan B yang merupakan matriks simetris, karena $A^T = A$ dan $B^T = B$. Adapun matriks C merupakan matriks *skew*-simetris, karena $C^T = -C$. □

Kalau kita lihat kembali tentang matriks diagonal, matriks, skalar dan matriks identitas, terlihat bahwa keseluruhan matriksnya merupakan matriks simetris.

Teorema 1.19 *Jika A adalah suatu matriks persegi, maka:*

(i) $A + A^T$ adalah simetris.

(ii) $A - A^T$ adalah skew-simetris.

Bukti. (i) Karena $A = [a_{ij}]$ adalah matriks persegi tentunya $A^T = [a_{ji}]$ adalah matriks persegi juga. Sehingga $A + A^T$ terdefinisi. Misalkan $B = A + A^T$. Entri dari matriks $B = [b_{ij}]$ adalah:

$$b_{ij} = a_{ij} + a_{ji} \tag{1.17}$$

Dan entri dari $B^T = [b_{ji}]$ adalah:

$$b_{ji} = a_{ji} + a_{ij} \tag{1.18}$$

Dari (1.17) dan (1.18), harga $a_{ij} + a_{ji} = a_{ji} + a_{ij}$ (sifat komutatif pada penjumlahan). Oleh karena itu, $b_{ji} = b_{ij}$ atau matriks $B^T = B$. Dari Definisi 1.18, matriks $B = A + A^T$ adalah simetris.

Selanjutnya pembuktian (ii) diberikan kepada pembaca sebagai latihan. Gunakan langkah-langkah pada pembuktian (i). ■

Contoh 1.21 Diketahui matriks persegi $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & -3 & -2 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$. Maka:

$$A + A^T = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & -3 & -2 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

dan:

$$A - A^T = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & -3 & -2 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 9 \\ 1 & 0 & -6 \\ -9 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tampak bahwa $A + A^T$ merupakan matriks simetris dan $A - A^T$ merupakan matriks *skew*-simetris seperti yang dijamin oleh Teorema 1.19.

LATIHAN 1.3

1. Berikanlah contoh dari masing-masing matriks persegi yang dibahas pada bagian 1.3 yang berukuran 3 x 3, 4 x 4, dan 5 x 5.
2. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 4 & -3 & -5 \\ 6 & 2 & 7 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 6 & 5 & 5 \\ 5 & 3 & 8 \end{bmatrix}$. Carilah matriks persegi X sedemikian sehingga $2X = AB - A^T + B^T$.
3. Tentukan semua matriks bilangan bulat $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ yang memenuhi $A^2 = I$ dan $b + c = 0$. (I adalah matriks identitasnya).
4. Diketahui dua matriks diagonal $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, dan $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. Perlihatkanlah bahwa $A + B$ dan AB juga merupakan matriks diagonal.
5. Diketahui $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$. Perlihatkan bahwa $(A + I)^2 = A^2 + 2AI + I^2$, di mana I adalah matriks identitasnya.
6. Diberikan dua buah matriks segitiga atas $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 9 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. Perlihatkan bahwa:
   (a) $A + B$ adalah matriks segitiga atas.
   (b) $(A - B)^T$ adalah matriks segitiga bawah.
   (c) AB adalah matriks segitiga atas.
7. Jika diketahui matriks segitiga atas $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ dan matriks skalar $B = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$, maka perlihatkan bahwa:

(a) AB merupakan matriks segitiga atas.
(b) $A^T B$ merupakan matriks segitiga bawah.
(c) $AB = BA$.

8. Suatu matriks persegi A disebut idempoten jika $A^2 = A$. Perlihatkan bahwa $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & -3 \end{bmatrix}$ adalah idempoten.
9. Suatu matriks persegi A disebut nilpoten jika $A^p = 0$ untuk suatu bilangan bulat positif p. Bilangan bulat terkecil p disebut sebagai indeks dari nilpoten. Perlihatkan bahwa $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ adalah nilpoten. Kemudian tentukan indeks nilpotennya.
10. Jika matriks A adalah nilpoten, perlihatkanlah bahwa matriks $B = I - A$ adalah nilpoten dan $AB = BA = 0$.
11. Sebagai perluasan dari soal nomor 4, Jika A dan B adalah dua buah matriks diagonal yang berukuran $n \times n$. Buktikan bahwa $A + B$ dan AB juga merupakan matriks diagonal.
12. Sebagai perluasan dari soal nomor 7, jika A adalah matriks segitiga bawah dan B adalah matriks skalar, maka buktikan bahwa $A + B$ adalah matriks segitiga bawah dan $AB = BA$ (komutatif).
13. Untuk sembarang tiga buah matriks persegi A, B, dan C, buktikan bahwa jika $AB = AC$ maka $B = C$.
14. Buktikanlah Teorema 1.14.
15. Buktikanlah bahwa penjumlahan dan perkalian dari dua buah matriks segitiga atas merupakan matriks segitiga atas juga.
16. Buktikanlah bahwa penjumlahan dan perkalian dari dua buah matriks segitiga bawah merupakan matriks segitiga bawah juga.
17. Diketahui A dan B adalah dua buah matriks simetris yang berukuran $n \times n$. Buktikanlah bahwa AB adalah simetris jika dan hanya jika $AB = BA$.
18. Buktikanlah Teorema 1.19(ii).
19. Jika A adalah matriks simetris, maka buktikanlah bahwa AA^T simetris begitu pula halnya dengan $A^T A$. Apakah $A^T = A^T A$? Berikanlah pendapat Anda.

1.4 KOMPUTASI MATRIKS DENGAN MATLAB

Banyak program komputasi yang dapat digunakan untuk perhitungan matriks, di antaranya Pascal, Fortran, C, C⁺, R, dan Matlab. Pada program Pascal, Fortran, C, dan C⁺ kita terlebih dahulu mendesain sebuah *source code program* sebelum melakukan komputasi matriks. Adapun pada R dan Matlab, kita tidak perlu mendesain *source code program* terlebih dahulu dalam komputasi matriks melainkan hanya berupa algoritma saja yang kita input-

kan. *Source code program* dapat dibuat jika memang diperlukan. Pada buku ini, penulis menggunakan program Matlab untuk komputasi matriks.

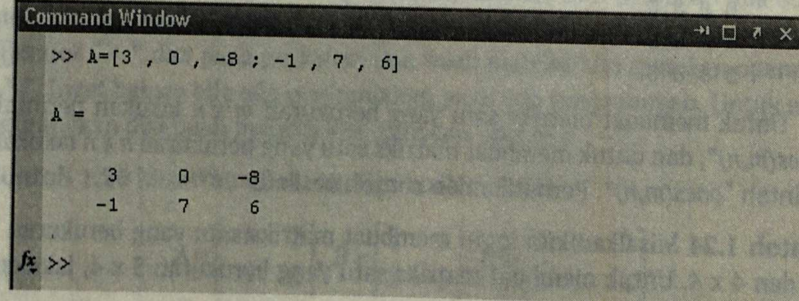
1.4.1 Membuat Matriks

Untuk membuat matriks pada Matlab, pembaca dapat menginput matriks pada **Command Window** di Matlab. Terdapat istilah dalam dunia pemrograman, yaitu input dan output. Input berarti masukan (data) dan output berarti keluaran (hasil).

Contoh 1.22 Misalkan kita akan membuat matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -8 \\ -1 & 7 & 6 \end{bmatrix}$. Pada command window lakukan perintah:

```
>> A=[3 , 0 , -8 ; -1 , 7 , 6]
```

Lalu tekan tombol enter. Maka akan diperoleh:



Lihat bahwa tanda koma " , " memisahkan entri-entri pada tiap baris, dan tanda titik koma " ; " memisahkan antara baris pertama dengan baris kedua.

Matriks juga dapat dibuat dengan menghilangkan tanda koma " , " dan diganti dengan "spasi". Pada *command window*, lakukan perintah:

```
>> A=[3 0 -8 ; -1 7 6]
A =
     3  0 -8
    -1  7  6
```

Untuk matriks yang berukuran lebih besar, cara input matriks seperti di atas kurang efisien. Cara lain yang dapat digunakan adalah setelah tanda " ; " enter ke bawah.

```
>> A=[3 0 -8 ;
-1 7 6]
A =
     3  0 -8
    -1  7  6
```

Bagaimana bila kita ingin membuat matriks nol atau matriks satu? Untuk membuat matriks nol yang berukuran $m \times n$ lakukan perintah "*zeros(m, n)* ", dan untuk matriks nol yang berukuran $m \times n$ lakukan perintah " *zeros(n)*". Perhatikan contoh berikut.

Contoh 1.23 Misalkan kita ingin membuat matriks nol yang berukuran 3 x 4 dan 4 x 4. Untuk membuat matriks nol yang berukuran 3 x 4, lakukan perintah

```
>> zeros(3,4)
ans =
     0 0 0 0
     0 0 0 0
     0 0 0 0
```

Lalu untuk membuat matriks nol yang berukuran 4 x 4 perintah yang di input adalah

```
>> zeros(4)
ans =
     0 0 0 0
     0 0 0 0
     0 0 0 0
     0 0 0 0
```

□

Untuk membuat matriks satu yang berukuran *m x n* lakukan perintah "*ones(m,n)*", dan untuk membuat matriks satu yang berukuran *n x n* lakukan perintah "*ones(m,n)*". Perhatikanlah contoh berikut.

Contoh 1.24 Misalkan kita ingin membuat matriks satu yang berukuran 3 x 4 dan 4 x 4. Untuk membuat matriks satu yang berukuran 3 x 4, lakukan perintah:

```
>> ones(3,4)
ans =
     1 1 1 1
     1 1 1 1
     1 1 1 1
```

Lalu untuk membuat matriks satu yang berukuran 4 x 4, perintah yang di input adalah

```
>> ones(4)
ans =
     1 1 1 1
     1 1 1 1
     1 1 1 1
     1 1 1 1
```

□

Bagaimana pula bila membuat matriks baris atau matriks kolom? Pada bagian 1.1, telah kita ketahui bahwa matriks baris (vektor baris) adalah matriks yang berukuran 1 x *n* dan matriks kolom adalah matriks yang berukuran *n* x 1. Berikut ini diberikan contoh pembuatan matriks baris dan matriks kolom.

Contoh 1.25 Buatlah matriks baris yang berukuran 1 x 3 dan matriks kolom yang berukuran 3 x 1.

Untuk membuat matriks baris yang berukuran 1 x 3 ketikkan perintah:

```
>> A=[1 3 5]
A =
     1 3 5
```

Untuk membuat matriks baris yang berukuran 3 x 1 ketikkan perintah:

```
>> A=[1 ; 3 ; 5]
A =
 1
 3
 5
```

1.4.2 Penjumlahan dan Perkalian Dua Buah Matriks

Sebelumnya kita telah membahas bagaimana membuat matriks. Pada bagian ini akan kita bahas mengenai penjumlahan dan perkalian dua buah matriks atau lebih. Untuk menjumlahkan dua buah matriks kita gunakan operator " + " dan pada perkalian dua buah matriks kita gunakan operator " * ". Ingat bahwa bila ada penjumlahan pasti ada pengurangan. Untuk mengurangkan dua buah matriks kita gunakan operator " – ".

Contoh 1.26 Misalkan diketahui tiga buah matriks

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 5 & -4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}5 & 4\\ 2 & -3\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}3 & 0 & 2\\ 6 & 7 & -4\end{bmatrix}.$$

Pertama input ketiga buah matriks di *command window.*

```
>> A=[-1 2 ; 5 -4]
A =
     -1 2
      5 -4
>> B=[5 4 ; 2 -3]
B =
     5 4
     2 -3
>> C=[3 0 2 ; 6 7 -4]
C =
     3 0  2
     6 7 -4
```

Jika kita ingin menjumlahkan matriks *A* dan matriks *B*, lakukan peritah berikut.

```
>> A+B
ans =
     4 6
     7 -7
```

Lalu tekan enter. Dan bila kita ingin mengalikan matriks *B* dengan matriks *C*, lakukan perintah berikut.

```
>> B*C
```

```
ans =
     39  28 -6
    -12 -21 16
```

Selanjutnya untuk mengurang dua buah matriks, lakukanlah perintah berikut.

```
>> A-B
ans =
    -6 -2
     3 -1
>> A-C
??? Error using ==> minus
Matrix dimensions must agree.
```

Lihatlah pada pengurangan "$A-C$", terjadi kesalahan (*error*). Hal ini disebabkan oleh ukuran dari kedua matriks tidak sama. Pada bagian 1.2.1 telah kita ketahui bahwa dua buah matriks dapat dijumlahkan atau dikurangkan jika memiliki ukuran yang sama. □

Bagaimana bila sebuah matriks persegi dipangkatkan? Untuk melakukan perpangkatan dari sebuah matriks persegi A lakukanlah perintah "A^n". Agar pembaca dapat memahaminya, perhatikanlah contoh berikut.

Contoh 1.27 Misalkan diketahui matriks persegi $A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 3\\ 3 & -2 & 2\end{bmatrix}$. Pertama sekali lakukan input matriks

```
>> A=[-2 1 -1 ; 1 -2 3 ; 3 -2 2]
A =
    -2  1 -1
     1 -2  3
     3 -2  2
```

Untuk mencari pangkat 2 dari matriks A, kita lakukan perintah sebagai berikut:

```
>> A^2
ans =
     2 -2  3
     5 -1 -1
    -2  3 -5
```

Dan untuk mencari pangkat 3 dari matriks A, kita lakukan perintah sebagai berikut

```
>> A^3
ans =
     3   0  -2
   -14   9 -10
    -8   2   1
```


1.4.3 Transpose, Trace, dan Invers Matriks

Jika A adalah suatu matriks, perintah untuk mencari transpose matriks A pada Matlab adalah " *A'* ". Untuk mencari *trace* dari matriks A gunakan perintah " *trace(A)* ". Dan untuk mencari *invers* dari matriks A gunakan perintah " *inv(A)* ". Perlu diingat bahwa pada transpose, matriksnya boleh bebas atau berukuran $m \times n$. Namun pada pencarian *trace* dan *invers*, matriksnya haruslah berupa matriks persegi.

Contoh 1.28 Dari matriks A pada Contoh 1.27, kita cari transpose, *trace* dan inversnya yang masing-masing sebagai berikut.

```
>> A' %transpose
ans =
    -2  1  3
     1 -2 -2
    -1  3  2
>> trace(A) %trace
ans =
    -2
>> inv(A) %invers
ans =
    -2.0000 0.0000 -1.0000
    -7.0000 1.0000 -5.0000
    -4.0000 1.0000 -3.0000
```

Lihat pada *inv(A)*, entri-entrinya berupa bilangan real dengan ketelitian sampai empat tempat desimal.

1.4.4 Matriks Diagonal, Identitas, dan Skalar

Pada bagian 1.3, kita telah mengenal matriks diagonal, identitas, dan matriks skalar. Misalkan diketahui matriks persegi A. Untuk menentukan diagonal utamanya, lakukan perintah " *diag(A)* ". Perhatikan contoh berikut.

Contoh 1.29 Dari matriks A pada contoh 1.28, akan dicari diagonal utamanya dengan perintah:

```
>> B=diag(A) %diagonal utama dari matriks A
B =
    -2
    -2
     2
```

Jika kita ingin membuat matriks diagonal dari diagonal utama B, lakukan perintah:

```
>> D=diag(B) %matriks diagonal dari B
D =
   -2  0  0
    0 -2  0
    0  0  2
```

Matriks D merupakan matriks diagonal yang dibuat dari matriks A. □

Bagaimana untuk membuat matriks identitas dan matriks skalar? Untuk membuat matriks identitas, gunakanlah perintah "*eye(n)*", dengan n adalah bilangan asli. Dan, untuk matriks skalar, gunakan perintah " *k*eye(n)* ", di mana k adalah suatu bilangan skalar (*real*).

Contoh 1.30 Untuk membuat matriks identitas yang berukuran 3 x 3 lakukan perintah:

```
>> I=eye(3)
I =
     1  0  0
     0  1  0
     0  0  1
```

Untuk membuat matriks skalar berukuran 3 x 3 yang seluruh entri pada diagonal utama adalah 4, lakukan perintah:

```
>> 4*I %matriks skalar
ans =
     4  0  0
     0  4  0
     0  0  4
```

Catatan: Untuk membuat matriks segitiga, pembaca dapat menerapkan cara yang ada di bagian 1.4.1. Untuk menentukan sebuah matriks dapat dibalik atau tidak, pembaca cukup mencari *invers* dari matriks tersebut. Jika memiliki *invers*, maka matriks tersebut dapat dibalik. Untuk menentukan sebuah matriks itu simetris atau tidak, pembaca cukup melakukan transpose terhadap matriks tersebut. Jika transposenya sama dengan matriksnya, maka matriks tersebut simetris.

LATIHAN 1.4

1. Lengkapilah matriks A dan B di bawah ini dengan aturan sebagai berikut: (i) Gantilah nilai a dengan digit pertama dari NIM Anda; (ii) Gantilah nilai b dengan digit terakhir dari NIM Anda; (iii) Gantilah nilai c dengan dua digit pertama dari NIM Anda; dan (iv) Gantilah nilai d dengan dua digit terakhir dari NIM Anda.

   Misalkan NIM Anda adalah **1525367.** Maka nila $a = 1$, $b = 7$, $c = 15$, dan $d = 67$. Jika NIM Anda adalah **1525102**, maka $d = b = 2$.

$$A = \begin{bmatrix} a & 2 & a & 1 & 9 \\ -1 & 4 & 8 & c & b \\ a & 6 & 2 & 10 & 5 \\ 3 & c & 7 & b & d \\ d & 9 & b & 5 & 1 \end{bmatrix} \text{dan } B = \begin{bmatrix} 3 & b & 5 & 0 & c \\ -a & 7 & d & 10 & 3 \\ 2 & 6 & d & b & 1 \\ 3 & -c & 7 & -8 & d \\ a & d & 9 & 1 & a \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan Matlab, tentukanlah:

(a) $A + B$

(b) $(A - B)^T$

(c) $(B^T - A^T)$

(d) A^{-1} (*invers* dari)

(e) $tr(AB)$

(f) $A^3 B^2$

(g) $(AB)^{-1}$

(h) $B^{-1} A^{-1}$

(i) $(B^T A^{-1})^{-5}$

(j) Matriks diagonal dari B

SISTEM PERSAMAAN LINIER 2

Pada bab ini akan dijelaskan tentang sistem persamaan linier, penyelesaian sistem persamaan linier (eliminasi-substitusi, operasi baris elementer, eliminasi Gauss-Jordan), sistem persamaan linier homogen, serta penggunaan Matlab dalam penyelesaian sistem persamaan linier.

2.1 SISTEM PERSAMAAN LINIER

Suatu persamaan linier merupakan suatu persamaan di mana derajat (pangkat) tertinggi dari variabel-variabelnya adalah satu. Persamaan linier dengan dua variabel adalah $ax + by = c$, di mana variabel-variabelnya adalah x dan y. Nilai a dan b masing-masing merupakan koefisien dari variabel x dan y, sedangkan nilai c adalah sebuah konstanta. Untuk persamaan linier tiga variabel bentuk umumnya adalah $ax + by + cz = d$, di mana variabel-variabelnya adalah x, y, dan z.

Namun untuk persamaan linier dengan n buah variabel, penulisan variabel alfabet tidaklah cukup, mengapa? Untuk itu digunakanlah variabel berindeks sebagai pengganti variabelnya. Misalkan variabelnya adalah $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dan koefisiennya adalah $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Suatu persamaan linier dengan n variabel dapat ditulis dalam bentuk:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b, \tag{2.1}$$

dengan b adalah sebuah konstanta. Agar pembaca dapat membedakan mana yang merupakan persamaan linier dan mana yang bukan persamaan linier, perhatikanlah contoh berikut.

Contoh 2.1 Berikut ini merupakan persamaan linier:

$$2x + 4y = 7 \qquad 4x_1 + 2x_2 = -6$$
$$2s - 3t + 5u = 7 \qquad 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 - x_4 = 10.$$

Adapun persamaan:

$$2x + 3xy - 2y = 5,\; 2x^2 - 3x - 5 = 0, \text{ dan } \sin x - 2\cos x = 1$$

bukan merupakan persamaan linier atau merupakan persamaan tak linier. Namun persamaan tak linier tersebut dapat dituliskan menjadi persamaan linier dengan melakukan pemisalan. Pada persamaan 2x + 3xy − 2y = 5, jika dimisalkan $xy = z$, maka akan berbentuk persamaan linier yaitu 2x + 3z − 2y = 5. □

Sistem persamaan linier (SPL) adalah suatu sistem di mana terdapat dua buah atau lebih persamaan linier. Untuk memahaminya, perhatikan definisi berikut.

Definisi 2.1 *Suatu sistem persamaan linier yang terdiri dari m buah persamaan dan n buah variabel adalah sistem persamaan linier yang berbentuk:*

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \tag{2.2}$$

di mana $x_1, x_2, \ldots, x_n$ merupakan variabel, $a_{ij} \in R$ (i=1, 2, ..., m dan j = 1, 2, ... n) merupakan koefisien dari variabelnya, dan $b_1, b_2, \ldots, b_m$ merupakan konstanta-konstantanya.

Jika pada bentuk (2.2) masing-masing unsurnya yaitu koefisien, variabel dan konstantanya kita pisahkan, maka akan terbentuk tiga buah matriks, yaitu:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\ \text{dan } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

di mana $A = [a_{ij}]$ disebut sebagai matriks koefisien, $X = [x_j]$ disebut sebagai matriks variabel, dan $B = [b_i]$ disebut sebagai matriks konstan. Sehingga bentuk (2.2) dapat dituliskan dalam bentuk persamaan matriks:

$$AX = B \tag{2.3}$$

Pada pembahasan selanjutnya akan disinggung tentang matriks yang diperbesar (*Augmented Matrix*). Matriks yang diperbesar dari (2.2) adalah matriks yang berbentuk:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

Matriks yang diperbesar dari suatu sistem persamaan linier nantinya akan digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier dengan operasi baris elementer dan eliminasi Gauss-Jordan.

Agar pembaca dapat memahami tentang sistem persamaan linier, perhatikanlah contoh berikut.

Contoh 2.2 Di bawah ini merupakan sistem persamaan linier.

(1) $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ -4x + 5y = -3 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 7 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 = -10 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2a - 2b + 3c - 5d = -1 \\ a + b - 3c + 4d = 1 \\ 3a - b + d = 2 \\ -2a + 3b - 2c + 5d = 5 \end{cases}$

Sistem persamaan (1), (2), dan (3) berturut-turut merupakan sistem persamaan linier dua variabel, tiga variabel, dan empat variabel. Lihat pada sistem persaman (3), $3a - b + d = 2$. Ini berarti koefisien dari variabel c-nya bernilai 0. □

Contoh 2.3 Dari Contoh 2.2 (2), akan dicari matriks koefisien, matriks variabel, matriks konstan, dan matriks diperbesarnya. Matriks koefisien, matriks variabel, dan matriks konstannya masing-masing adalah:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{dan } B = \begin{bmatrix} 7 \\ -10 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Lalu matriks yang diperbesar dari (2.2) adalah:

$$C = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 7 \\ -1 & 1 & -3 & -10 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$ □

LATIHAN 2.1

1. Yang manakah dari persamaan-persamaan di bawah ini yang merupakan persamaan linier?

(a) $3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 5$

(b) $-\sqrt{2}s + 3t + 2u = 10$

(c) $2p - 2pq - 5q = -1$

(d) $(\sin 3)x + e^3 y + 5z = 4$

(f) $3u + 5v - 2w = 0$

(g) $\frac{1}{\sqrt{2}}a_1 - \frac{2}{\sqrt{3}}a_2 + \frac{1}{\sqrt{5}}a_3 = 7$

(h) $x_1 = x_2$

(i) $3\int dx - 5\int dy + \int dz = 8$

(e) $2\sqrt{x}+3\sqrt{y}=10$ (j) $\log x + 2\log y = 5$

2. Yang manakah dari sekumpulan sistem persamaan di bawah ini yang merupakan sistem persamaan linier?

(a) $\begin{cases} 2x-0.5y=7 \\ -0,5x+3y=8 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=5 \\ \frac{2}{x}+\frac{1}{y}=9 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=3 \\ -2x_1+2x_2-x_3=-5 \\ x_1+x_2-4x_3=2 \end{cases}$ (g) $\begin{cases} 2\alpha+3\beta-4\gamma=1 \\ -\alpha+2\beta-2\gamma=-1 \\ \alpha-\beta+3\gamma=3 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x+xy+y=11 \\ 2x-xy+3y=-8 \\ 3x+2xy-3y=15 \end{cases}$ (h) $\begin{cases} 2\sin x-\cos y+3\tan z=1 \\ \sin x+\cos y-2\tan z=2 \\ 3\sin x-\cos y-\tan z=0 \end{cases}$

3. Buatlah matriks koefisien, matriks variabel, dan matriks konstan dari masing-masing sistem persamaan linier di bawah ini. Kemudian, buat pula matriks yang diperbesar.

(a) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=3 \\ -2x_1+2x_2-x_3=-5 \\ x_1+x_2-4x_3=2 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} -x_1-2x_2+x_3+3x_4=7 \\ 2x_1-3x_2+4x_3=5 \\ 3x_2-3x_3-x_4=-2 \\ 4x_1+x_2-3x_3+x_4=9 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2a-4b+3c=12 \\ 4a+b-2c=2 \\ -2a-3b-c=-6 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} 3x_1+5x_2-7x_3+x_4-2x_5=7 \\ x_1-2x_2+x_4+3x_5=6 \\ -2x_1-2x_4-x_5=-7 \\ 4x_1+2x_2+x_3-x_5=10 \end{cases}$

4. Ubahlah masing-masing dari sistem persamaan berikut menjadi sistem persamaan linier dengan melakukan pemisalan.

(a) $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=5 \\ \frac{2}{x}-\frac{3}{y}-\frac{1}{z}=-4 \\ \frac{1}{x}-\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=8 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} \sin x-2\cos y-3\tan z=2 \\ 2\sin x+2\cos y-\tan z=1 \\ \sin x-\cos y+2\tan z=0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x+xy-y=7 \\ x-2xy+3y=-3 \\ 2x+2xy-4y=10 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} {}^2\log x+{}^3\log y^2-\log z^5=6 \\ {}^2\log x^2-{}^3\log y+\log z^3=1 \\ {}^2\log\frac{1}{x}+{}^3\log y^3-\log z=0 \end{cases}$

2.2 SOLUSI DARI SISTEM PERSAMAAN LINIER

Kita tinjau kembali tentang persamaan linier. Misalkan diketahui persamaan $2x + 3y = 6$. Berapakah nilai dari (x, y) dengan $x, y \in R$, sedemikian sehingga persamaan linier tersebut terpenuhi? Nilai dari variabel x dan y ini merupakan solusi dari persamaan linier tersebut. Berikut diberikan definisi tentang solusi persamaan linier.

Definisi 2.2 *Solusi dari persamaan linier $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$ adalah sekumpulan bilangan $s_1, s_2, \dots, s_n$ sehingga jika kita substitusikan nilai $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$ maka persamaan linier tersebut terpenuhi.*

Andaikan ada pertanyaan, apakah (3,0) dan (0,3) merupakan solusi dari persamaan $2x + 3y = 6$? Untuk mengetahuinya, kita lakukan substitusi ke persamaannya. Pertama untuk (3,0):

$$2x + 3y = 2(3) + 3(0) = 6$$

Karena setelah di substitusi diperoleh hasil yaitu sama dengan 6, dapat kita katakan bahwa (3,0) merupakan solusinya. Selanjutnya untuk (0,3):

$$2x + 3y = 2(0) + 3(3) = 9 \neq 6.$$

Karena diperoleh hasil yaitu $9 \neq 6$, dapat kita katakan bahwa (0,3) bukan merupakan solusinya.

Perlu kita ketahui bahwa solusi dari persamaan $2x + 3y = 6$, tidak hanya (3,0). Misalkan (0,2), (-3,4), dan (6,-2) juga merupakan solusinya. Untuk mengeceknya, pembaca dapat melakukan substitusi ke persamaannya. Lalu solusi umumnya apa? Jika kita tetapkan $y = s$ dengan $s \in R$ sebagai salah satu solusinya, maka solusi yang lain adalah $x=\frac{1}{2}(6-3s)$. Oleh karena itu, dalam notasi himpunan, solusinya dapat dituliskan sebagai:

$$(x,y)=\left\{\left(\frac{1}{2}(6-3s),s\right)\middle| s\in R\right\}.$$

Selanjutnya, untuk persamaan $2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5$. Tetapkanlah nilai $x_1 = s$, $x_3 = t$ sehingga $x_2 = 2s + 4t - 5$.

Pada bagian (2.1) telah kita ketahui bahwa sistem persamaan linier merupakan sistem yang terdiri dari dua buah persamaan linier atau lebih. Solusi dari sistem persamaan linier diberikan oleh definisi berikut.

Definisi 2.3 *Solusi dari sistem persamaan linier (2.2) adalah sekumpulan bilangan $s_1, s_2, \dots, s_n$ sehingga $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$ merupakan solusi dari masing-masing persamaannya.*

Contoh 2.4 Apakah (1,-1,2) merupakan solusi dari sistem persamaan berikut ini?

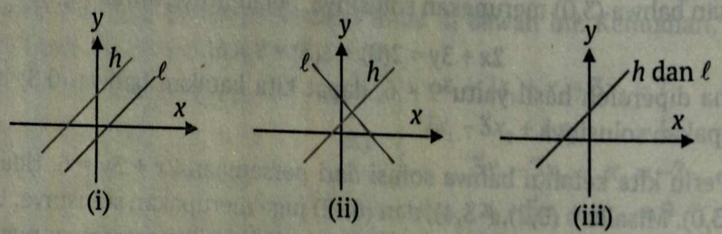
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -3 \quad ? \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

Untuk mengeceknya, kita substitusikan saja $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, dan $x_3 = 2$ ke masing-masing persamaan liniernya yakni:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 1 - 2(-1) + 2(2) = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 2(1) + 3(-1) - 2 = -3 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 &= -2(1) + (-1) + 3(2) = 3 \end{aligned}$$

Karena setelah disubstitusikan diperoleh nilai $(7,-3,3)^T$, dapat disimpulkan bahwa (1,-1,2) merupakan solusinya. □

Sistem persamaan linear (2.2) dikatakan *konsisten* jika mempunyai sedikitnya satu buah solusi, dan dikatakan *tidak konsisten* jika tidak mempunyai solusi. Berikut ini ilustrasi geometri tentang sistem persamaan linier yang konsisten dan tak konsisten.



GAMBAR 2.1 KEMUNGKINAN YANG TERJADI UNTUK DUA BUAH GARIS LURUS

Penjelasan tentang Gambar 2.1 sebagai berikut.

(i) Garis h sejajar dengan garis ℓ, sehingga tidak akan mungkin berpotongan. Oleh sebab itu, sistem persamaan tidak mempunyai solusi (tak konsisten).

(ii) Garis h berpotongan dengan garis ℓ di satu buah titik. Oleh sebab itu, sistem mempunyai satu buah solusi (konsisten).

(iii) Garis h berimpit dengan garis ℓ, dalam hal ini titik potong antara kedua buah garis tak hingga banyaknya. Oleh karena itu, sistem mempunyai solusi yang tak hingga banyaknya (konsisten).

Terdapat beberapa cara/metode dalam menyelesaikan sistem persamaan linier. Di antaranya:

1. Metode eliminasi-substitusi
2. Operasi baris elementer
3. Eliminasi Gauss-Jordan

Masing-masing dari keempat cara/metode di atas dijelaskan sebagai berikut.

2.2.1 Metode Eliminasi-Substitusi

Metode eliminasi-substitusi merupakan metode yang sering digunakan dalam menyelesaikan sistem persamaan linier. Eliminasi berarti menghilangkan satu atau beberapa variabel. Setelah proses eliminasi selesai biasanya akan ada satu variabel yang tersisa, yakni $x_k = s_k$, kecuali jika terdapat persamaan-persamaan yang berupa garis sejajar atau berimpit. Setelah itu, nilai $x_k = s_k$ yang tersisa ini disubstitusikan ke persamaan lainnya. Untuk melakukan proses eliminasi, koefisien dari variabel tersebut haruslah sama. Jika tidak sama, maka carilah faktor pengali sedemikian rupa agar menjadi sama, dalam hal ini cari kelipatan persekutuan terkecilnya (KPK). Jika pada saat melakukan proses eliminasi, variabel yang akan dieliminasi bertanda sama, yakni keduanya negatif atau keduanya positif, maka lakukanlah operasi pengurangan. Dan jika berbeda tanda, yaitu positif dengan negatif atau atau negatif dengan positif, maka lakukanlah operasi pengurangan. Contoh berikut merupakan sistem persamaan linier yang memiliki tepat satu buah solusi.

Contoh 2.5 Carilah solusi dari sistem persamaan linier

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 5 \quad \ldots\ldots (1) \\ x_1 + 2x_2 = 6 \quad \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

Langkah pertama, eliminasi persamaan (1) dan (2). Karena pada sistem persamaan linier ini adalah dua variabel, eliminasi dapat dilakukan pada variabel x_1 atau x_2. Misalkan dilakukan eliminasi pada x_1. Lihatlah koefisien x_2 yaitu 2 pada persamaan pertama dan 1 pada persamaan kedua. Kalikanlah persamaan pertama dengan 1 dan kalikan persamaan kedua dengan 2, sehingga:

$$\begin{array}{r|l|r} 2x_1 - 3x_2 = 5 & .1 & 2x_1 - 3x_2 = 5 \\ x_1 + 2x_2 = 6 & .2 & \underline{2x_1 + 4x_2 = 12} \; - \\ & & -7x_2 = -7 \\ & & x_2 = \dfrac{-7}{-7} = 1 \end{array}$$

Langkah kedua, kemudian substitusi nilai $x_1 = 1$ ke persamaan pertama atau kedua. Misalnya dilakukan substitusi pada persamaan pertama:

$$\begin{aligned} 2(1) - 3x_2 &= 5 \\ -3x_2 &= 3 \\ x_2 &= \frac{3}{-3} = -1 \end{aligned}$$

Oleh karena itu, solusi sistem persamaan linier ini adalah (1, -1). Ini berarti, sistem persamaan ini mempunyai satu solusi atau bila digambarkan garisnya berpotongan untuk eliminasi variabel x_2 diberikan kepada pembaca sebagai latihan.

Contoh berikut merupakan sistem persamaan linier yang tidak konsisten.

Contoh 2.6 Carilah solusi dari sistem persamaan linier:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4 & \dots\dots (1) \\ 4x_1 + 2x_2 = 10 & \dots\dots (2) \end{cases}$$

Eliminasi variabel x_2 pada persamaan (1) dan (2). Lihatlah koefisien x_1 yaitu 1 pada persamaan pertama dan 2 pada persamaan kedua, sehingga diperoleh:

$$\begin{array}{r|l|l} 2x_1 + x_2 = 4 & .2 & 4x_1 + 2x_2 = 8 \\ 4x_1 + 2x_2 = 10 & .1 & \underline{4x_1 + 2x_2 = 10} \; - \\ & & \quad 0 = -2 \end{array}$$

Pada bagian akhir, $0 = -2$ adalah suatu kesalahan karena $0 \neq -2$ (tidak konsisten). Sistem persamaan ini tidak mempunyai solusi, karena garis lurus yang dibentuk oleh persamaan pertama sejajar dengan garis lurus yang dibentuk oleh persamaan kedua. Pembaca dapat menggambarkan kedua buah persaman tersebut. □

Bagaimana bila sistem persamaannya mempunyai solusi tak hingga banyaknya? Pembaca dapat memahami contoh berikut.

Contoh 2.7 Carilah solusi dari sistem persamaan linier:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 5 & \dots\dots (1) \\ 3x_1 - 6x_2 = 10 & \dots\dots (2) \end{cases}$$

Eliminasi variabel x_1 pada persamaan (1) dan (2). Kalikan persamaan pertama dengan 3 dan kalikan persamaan kedua dengan 1, sehingga diperoleh:

$$\begin{array}{r|l|l} x_1 - 2x_2 = 5 & .3 & 3x_1 - 6x_2 = 10 \\ 3x_1 - 6x_2 = 10 & .1 & \underline{3x_1 - 6x_2 = 10} \; - \\ & & \quad 0 = 0 \end{array}$$

Di bagian akhir, $0 = 0$ (konsisten), hal ini berarti garis lurus yang dibentuk oleh persamaan pertama berimpit dengan garis lurus yang dibentuk oleh persamaan kedua. Jadi sistem persamaan linier ini mempunyai solusi tak hingga banyaknya. Misalkan $x_2 = s$, dan substitusikan ke persamaan pertama diperoleh $x_1 = 2s + 5$. □

Pada Contoh 2.5 sampai 2.7, telah kita bahas tentang penyelesaian sistem persamaan linier dua variabel. Berikut ini diberikan contoh cara menyelesaikan sistem persamaan linier tiga variabel.

Contoh 2.8 Carilah solusi dari sistem persamaan linier:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 & \dots\dots (1) \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 & \dots\dots (2) \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5 & \dots\dots (3) \end{cases}$$

Di sini kita harus membuat sistem persamaan ini menjadi sistem persamaan linier dua variabel seperti pada Contoh 2.5 sampai 2.7.

Langkah pertama, eliminasi variabel x_2 pada persamaan (1) dan (2) sehingga diperoleh persamaan (4).

$$\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \\ \underline{x_1 + x_2 + x_3 = 6} \; - \\ x_1 - 3x_3 = -8 \;\dots\dots\dots\dots (4) \end{array}$$

Langkah kedua, eliminasi x_2 pada persamaan (1) dan (3) sehingga diperoleh persamaan (5).

$$\begin{array}{r|l|l} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 & .2 & 4x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5 & .1 & \underline{3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5} \; + \\ & & 7x_1 - 2x_3 = 1 \;\dots\dots\dots\dots (5) \end{array}$$

Langkah ketiga, eliminasi persamaan (4) dan (5), misalnya eliminasi x_3.

$$\begin{array}{r|l|l} x_1 - 3x_3 = -8 & .2 & 2x_1 - 6x_3 = -16 \\ 7x_1 - 2x_3 = 1 & .3 & \underline{21x_1 - 6x_3 = 3} \; - \\ & & -19x_1 = -19 \\ & & x_1 = 1 \end{array}$$

Langkah keempat, substitusi nilai $x_1 = 1$ ke persamaan (5).

$$\begin{aligned} 7x_1 - 2x_3 &= 1 \\ 7(1) - 2x_3 &= 1 \\ -2x_3 &= -6 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Langkah kelima, substitusi $x_1 = 1$ dan $x_3 = 3$ ke persamaan (2).

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 1 + x_2 + 3 &= 6 \\ x_2 + 4 &= 6 \\ x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Oleh karena itu, solusi dari sistem persamaan linier ini adalah (1,2,3). □

Penyelesaian sistem persamaan linier dengan variabel yang lebih dari 3, membutuhkan proses yang cukup panjang jika menggunakan metode eliminasi-substitusi. Lihatlah pada Contoh 2.8, penyelesaian sistem persamaan linier tiga variabel saja sudah mengalami enam langkah. Bagaimana bila variabelnya ada 6? Apakah metode ini efisien? Untuk melihat mana yang lebih efisien, pembaca dapat memahami metode selanjutnya.

2.2.2 Operasi Baris Elementer

Metode kedua adalah operasi baris elementer. Dalam operasi baris elementer tentunya yang dioperasikan adalah baris-barisnya, sehingga sistem persamaan linier dapat diselesaikan. Operasi yang digunakan dalam operasi baris elementer, yaitu:

(1) Mengalikan suatu baris dengan sembarang skalar k yang tak nol.
(2) Menukarkan dua buah baris.
(3) Menjumlahkan kelipatan k suatu baris dengan baris lainnya.

Untuk mempermudah penyelesaian sistem persamaan linier dengan operasi baris elementer, buatlah matriks yang diperbesar dari suatu sistem persamaan linier. Lalu buatlah matriks segitiga atas dari matriks diperbesar tersebut dengan entri-entri pada diagonal utamanya adalah 1.

Contoh 2.9 Tentukan solusi sistem persamaan linier pada Contoh 2.8 dengan operasi baris elementer. Sistem persamaan liniernya adalah:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

dan matriks yang diperbesar dari sistem persamaan linier tersebut adalah:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Dengan operasi baris elementer:

Langkah 1. Pertukarkan baris pertama dengan baris kedua, sehingga diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Langkah 2. Tambahkan −2 kali baris pertama dengan baris kedua, dan hasilnya disusun pada baris kedua, yakni:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -4 & -14 \\ 3 & -2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Langkah 3. Tambahkan −3 kali baris pertama dengan baris ketiga, dan hasilnya disusun pada baris ketiga, yakni:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -4 & -14 \\ 0 & -5 & -1 & -13 \end{bmatrix}$$

Langkah 4. Kalikan baris kedua dengan −1, sehingga diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 14 \\ 0 & -5 & -1 & -13 \end{bmatrix}$$

Langkah 5. Tambahkan 5 kali baris kedua dengan baris ketiga, dan hasilnya disusun pada baris ketiga, yakni:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 19 & 57 \end{bmatrix}$$

Langkah 6. Kalikan baris ketiga dengan 1/19, sehingga diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Langkah 7. Tambahkan −1 kali baris kedua dengan baris pertama, dan hasilnya disusun pada baris pertama, yakni

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -8 \\ 0 & 1 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Langkah 8. Tambahkan −4 kali baris ketiga dengan baris kedua, dan hasilnya disusun pada baris kedua, yakni

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Langkah 9. Tambahkan 3 kali baris ketiga dengan baris pertama, dan hasilnya disusun pada baris pertama, yakni:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solusi dari sistem persamaan ini adalah $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ dan $x_3 = 3$. □

Dari hasil langkah 6 pada contoh 2.9 dapat diselesaikan dengan teknik substitusi mundur. Hasil pada langkah 6, yaitu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Dari matriks tersebut diperoleh beberapa persamaan yaitu

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6 \quad ...... (1)$$
$$x_2 + 4x_3 = 14 \quad ...... (2)$$
$$x_3 = 3 \quad ...... (3)$$

Substitusikan $x_3 = 3$ ke persamaan (2) sehingga diperoleh:

$$x_2 + 4(3) = 14$$
$$x_2 = 2.$$

Selanjutnya substitusikan $x_2 = 2$ dan $x_3 = 3$ ke persamaan (1), sehingga diperoleh:

$$x_1 + 2 + 3 = 6$$
$$x_1 = 1.$$

Oleh karena itu, solusi dari sistem persamaannya adalah $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, dan $x_3 = 3$.

2.2.3 Eliminasi Gauss-Jordan

Pada eliminasi Gauss-Jordan, kita ubah suatu sistem persamaan linier menjadi sebuah matriks yang diperbesar. Kemudian reduksilah matriks diperbesar tersebut menjadi bentuk eselon baris tereduksi (*reduced row-echelon form*). Pada hasil dari langkah 9 di Contoh 2.9 yaitu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

Merupakan bentuk eselon baris tereduksi. Agar suatu matriks yang diperbesar merupakan bentuk eselon baris tereduksi, haruslah memenuhi sifat-sifat berikut.

(1) Jika terdapat baris pada matriks diperbesar yang mempunyai sedikitnya satu buah unsur (entri) bukan nol, maka unsur bukan nol yang pertama itu adalah 1. Unsur yang pertama kita sebut sebagai kepala baris.
(2) Jika terdapat baris yang seluruh unsurnya nol, maka letakkan baris tersebut di bagian bawah pada matriks.
(3) Jika pada dua baris berurutan yang unsurnya bukan nol, maka kepala baris pada baris yang lebih bawah berada di sebelah kanan dari kepala baris di baris yang berada di atasnya.
(4) Jika di dalam suatu kolom terdapat kepala baris, maka unsur-unsur lain pada kolom tersebut bernilai nol semua.

Jika syarat (1) hingga syarat (3) terpenuhi, maka disebut sebagai bentuk eselon baris. Bentuk eselon baris dikenal sebagai eliminasi Gauss. Untuk menyelesaikan sistem persamaan linier, penggunaan eliminasi Gauss harus disertai dengan substitusi mundur.

Contoh 2.10 Matriks-matriks di bawah ini berbentuk eselon baris.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dan matriks-matriks di bawah ini berbentuk eselon baris tereduksi.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad \square$$

Pada dasarnya operasi-operasi yang digunakan dalam eliminasi Gauss dan eliminasi Gauss-Jordan sama dengan operasi-operasi yang dilakukan pada operasi baris elementer. Hanya saja ada sedikit perbedaan dalam penulisannya, yaitu:

(1) Mengalikan suatu baris ke-i (R_i) dengan sembarang skalar k yang tak nol atau dapat ditulis dengan $R_i \leftarrow kR_i$. Dengan R_i menyatakan baris ke-i.
(2) Menukarkan dua buah baris atau $R_i \leftrightarrow R_j$.
(3) Menjumlahkan kelipatan k suatu baris R_i dengan baris R_j. Atau dapat ditulis dengan $R_j \leftarrow kR_i + R_j$.

Agar pembaca dapat memahami tentang operasi-operasi pada eliminasi Gauss dan eliminasi Gauss-Jordan, perhatikan Contoh 2.11 dan 2.12.

Contoh 2.11. Selesaikanlah sistem persamaan linier di bawah ini dengan eliminasi Gauss.

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= -4 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 &= -3 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 &= 9 \end{aligned}$$

Buatlah matriks yang diperbesar

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 & 9 \end{bmatrix}.$$

Setelah itu, lakukan operasi dengan eliminasi Gauss. Lihat kolom pertama, karena ada -1pada baris ketiga, tukarkan baris pertama dengan baris ketiga.

$$\overset{R_1 \leftrightarrow R_3}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 & 9 \\ -2 & 1 & -2 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Karena kepala baris harus bernilai 1, kalikan baris pertama dengan -1.

$$\begin{matrix} R_1 \leftarrow -R_1 \\ \sim \\ \ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -9 \\ -2 & 1 & -2 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Tambahkan 2 kali baris pertama dengan baris kedua dan susunlah sebagai baris kedua, dan tambahkan −3 kali baris pertama dengan baris ketiga dan susunlah sebagai baris ketiga.

$$\begin{matrix} R_2 \leftarrow 2R_1 + R_2 \\ \sim \\ R_3 \leftarrow -3R_1 + R_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -9 \\ 0 & 3 & -6 & -21 \\ 0 & -5 & 7 & 23 \end{bmatrix}$$

Kalikan baris kedua dengan $\frac{1}{3}$.

$$\begin{matrix} R_2 \leftarrow \frac{1}{3}R_2 \\ \sim \\ \ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & -5 & 7 & 23 \end{bmatrix}$$

Tambahkan 5 kali baris kedua dengan baris ketiga, dan susunlah sebagai baris ketiga.

$$\begin{matrix} R_3 \leftarrow 5R_2 + R_3 \\ \sim \\ \ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -3 & -12 \end{bmatrix}$$

Kalikan baris ketiga dengan $-\frac{1}{3}$.

$$\begin{matrix} R_3 \leftarrow -\frac{1}{3}R_3 \\ \sim \\ \ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Dari bentuk matriks terakhir diperoleh tiga persamaan, yaitu:

$$x_1 + x_2 - 2x_3 = -9 \quad ..... \ (1)$$
$$x_2 - 2x_3 = -7 \quad ..... \ (2)$$
$$x_3 = 4 \quad ..... \ (3)$$

Lakukan substitusi mundur. Substitusikan persamaan (3) ke persamaan (2) sehingga x_2 -8 = -7, dan diperoleh x_2 = 1. Kemudian substitusikan x_2 = 1 dan x_3 = -4 ke persamaan (1), sehingga diperoleh x_1 = -2. Oleh karena itu, penyelesaian dari sistem persamaan linier ini adalah x_1 = -2, x_2 = 1, dan x_3 = 4. □

Bagaimana bila pada Contoh 2.11 diselesaikan dengan eliminasi Gauss-Jordan? Perhatikan contoh berikut.

Contoh 2.12 Dari hasil eliminasi Gauss pada Contoh 2.11, diperoleh bentuk eselon barisnya yaitu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Untuk menyelesaikan dengan eliminasi Gauss-Jordan, harus kita buat menjadi bentuk eselon baris tereduksi.
Tambahkan 2 kali baris ketiga dengan baris kedua, dan susunlah sebagai baris kedua. Tambahkan 2 kali baris ketiga dengan baris pertama, dan susunlah sebagai baris pertama.

$$\begin{matrix} R_1 \leftarrow 2R_3 + R_1 \\ \sim \\ R_2 \leftarrow 2R_3 + R_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Tambahkan -1 kali baris kedua dengan baris pertama, dan susunlah sebagai baris pertama, sehingga diperoleh bentuk eselon baris tereduksi, yaitu:

$$\begin{matrix} R_1 \leftarrow -R_2 + R_1 \\ \sim \\ \ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Karena telah menjadi bentuk eselon baris tereduksi, kita simpulkan bahwa penyelesaian dari sistem persamaan linier ini adalah x_1 = -2, x_2 = 1, dan x_3 = 4. □

Pada Contoh 2.12, bentuk eselon baris tereduksinya mempunyai tepat satu buah solusi. Contoh 2.13 dan 2.14 berikut ini masing-masing memperlihatkan bentuk eselon baris tereduksi dari suatu sistem persamaan linier yang tidak mempunyai solusi dan yang mempunyai tak hingga banyaknya solusi.

Contoh 2.13 Jika pada waktu melakukan eliminasi Gauss-Jordan kita peroleh bentuk eselon baris tereduksinya yaitu:

$$\text{(a)}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \text{(b)}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{dan (c)}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Maka, tidak mempunyai solusi. Hal ini dikarenakan, pada baris ketiga dari bentuk eselon baris tereduksi (a), $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 3$, tidak akan mungkin ada nilai x_1, x_2, dan x_3 yang memenuhi. Sehingga persamaan ini dikatakan tidak konsisten. Begitu pula pada baris kedua dari (b) yaitu $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 7$. Dan, pada baris keempat dari (c), yaitu $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 4$.

Contoh 2.14 Jika pada waktu melakukan eliminasi Gauss-Jordan kita peroleh bentuk eselon baris tereduksinya yaitu:

$$(a)\begin{bmatrix}1 & 0 & -4 & 1\\ 0 & 1 & 3 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\ (b)\begin{bmatrix}1 & -2 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\ \text{dan } (c)\begin{bmatrix}1 & 0 & -4 & 0 & 7 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Maka, bentuk eselon baris tereduksi (a), (b), dan (c) mempunyai solusi tak hingga banyaknya. Hal ini dikarenakan, pada (a) diperoleh sistem persamaan yang bersesuaian, yaitu:

$$x_1 - 4x_3 = 1$$
$$x_2 + 3x_3 = 6.$$

Dengan memecahkan sistem persamaan ini, diperoleh

$$x_1 = 1 + 4x_3 \text{ dan } x_2 = 6 - 3x_3$$

Tetapkanlah $x_3 = s$, sehingga diperoleh solusinya yaitu

$$x_1 = 1 + 4s,\ x_2 = 6 - 3s,\ \text{dan } x_3 = s.$$

Di mana s merupakan sembarang konstanta real.

Pada (b), sistem persamaan yang bersesuaian adalah

$$x_1 - 2x_2 = 4$$
$$x_3 = -3$$

Dengan memecahkan sistem ini dan menetapkan $x_2 = s$, maka diperoleh

$$x_1 = 4 + 2s,\ x_2 = s,\ \text{dan } x_3 = -3.$$

Di mana s merupakan sembarang konstanta real.

Pada (c), sistem persamaan yang bersesuaian adalah

$$x_1 - 4x_3 + 7x_5 = 1$$
$$x_2 + 2x_3 - x_5 = 4$$
$$x_4 + 3x_5 = -4$$

Dengan memecahkan sistem persamaan ini, diperoleh

$$x_1 = 1 + 4x_3 - 7x_5,\ x_2 = 4 - 2x_3 + x_5,\ \text{dan } x_4 = -4 - 3x_5$$

Untuk sembarang konstanta real s dan t, tetapkanlah $x_3 = s$ dan $x_5 = t$, sehingga diperoleh:

$$x_1 = 1 + 4s - 7t,\ x_2 = 4 - 2s + t$$
$$x_3 = s,\ x_4 = -4 - 3t,\ x_5 = t$$

□

LATIHAN 2.2

1. Manakah di bawah ini yang merupakan solusi dari persamaan $2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 6$?
   (a) $x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 0$
   (b) $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$
   (c) $x_1 = 3 + \frac{3}{2}s - 2t,\ x_2 = s,\ x_3 = t$, dimana $s,t \in R$.
   (d) $x_1 = p,\ x_2 = q,\ x_3 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}p + \frac{3}{4}q$, dimana $p,q \in R$.

2. Dengan menggunakan metode eliminasi-substitusi, carilah solusi dari sistem persamaan linier berikut.
   (a) $\begin{cases}2x_1 - 3x_2 = 5\\ 3x_1 + 2x_2 = 13\end{cases}$
   (b) $\begin{cases}p + 2q - 2r = -2\\ -p - 2q - 3r = -8\\ 2p + 4q + r = 6\end{cases}$
   (c) $\begin{cases}2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 1\\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 3\\ -2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -1\\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = -4\end{cases}$

3. Carilah bentuk eselon baris tereduksi dari matriks yang diperbesar berikut ini.
   (a) $\begin{bmatrix}2 & -1 & 3 & 7\\ 1 & 4 & -1 & 10\\ -2 & 0 & 2 & -4\end{bmatrix}$
   (b) $\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 3\\ 2 & -2 & 4 & 5\\ -1 & 3 & 5 & 10\end{bmatrix}$
   (c) $\begin{bmatrix}-1 & 3 & -2 & 4 & -10\\ 3 & 1 & 0 & 5 & 7\\ 2 & -4 & 6 & -1 & 8\\ -2 & 0 & 5 & 0 & 10\end{bmatrix}$

4. Dari soal nomor 2, carilah solusinya menggunakan operasi baris elementer.

5. Buatlah persamaan yang bersesuaian dari masing-masing bentuk eselon baris tereduksi berikut.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -5 \end{bmatrix}$

6. Selesaikanlah sistem persamaan di bawah ini dengan menggunakan eliminasi Gauss dan eliminasi Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 5x_4 &= -7 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 7 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= -6 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 &= 6 \end{aligned}$$

7. Tentukan semua bentuk eselon baris tereduksi yang mungkin dari matriks berikut ini.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

8. Tentukanlan nilai a agar sistem persamaan linier berikut konsisten.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 8 \\ (a+1)x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= -6 \end{aligned}$$

2.3 SISTEM PERSAMAAN LINIER HOMOGEN

Pada bagian ini akan dijelaskan tentang sistem persamaan linier homogen. Konsep sistem persamaan linier homogen nantinya akan digunakan pada bab selanjutnya, yaitu tentang kebebasan linier.

Definisi 2.4 *Suatu sistem persamaan linier homogen dari m buah persamaan dan n buah variabel adalah sistem persamaan linier yang berbentuk:*

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array} \tag{2.5}$$

Andaikan A adalah matriks koefisien dan X adalah matriks variabel dari sistem (2.5), maka sistem persamaan linier homogen dapat dituliskan sebagai:

$$AX = 0 \tag{2.6}$$

Solusi dari sistem persamaan (2.5) dikatakan sebagai solusi **trivial**, jika mempunyai tepat satu solusi yaitu $x_1 = x_2 \ldots = x_n = 0$. Jika mempunyai solusi lain (bukan 0), maka solusinya dikatakan sebagai solusi **tak trivial.**

Contoh 2.15 Tentukan solusi dari sistem persamaan homogen berikut dengan eliminasi Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Matriks diperbesarnya adalah:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan, diperoleh bentuk eselon baris tereduksinya, yaitu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Cara selengkapnya untuk memperoleh bentuk eselon barisnya diberikan kepada pembaca sebagai latihan. Sistem persamaan ini mempunyai solusi yang trivial, yakni $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ dan $x_3 = 0$. □

Berikut ini diberikan contoh tentang sistem persamaan linier homogen yang mempunyai solusi tak trivial.

Contoh 2.15 Tentukan solusi dari sistem persamaan homogen berikut dengan eliminasi Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 \quad &= 0 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Matriks diperbesarnya adalah:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan diperoleh bentuk eselon baris tereduksinya, yaitu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sistem persamaan yang bersesuaian adalah:

$$x_1 = 0$$
$$x_2 + x_4 = 0$$
$$x_3 - x_4 = 0$$

Dengan menetapkan nilai $x_4 = s$, dengan s adalah variabel bebas, diperoleh penyelesaian dari sistem persamaan linier homogen ini yaitu:

$$x_1 = 0,\ x_2 = -s,\ x_3 = x_4 = s.$$

Solusi ini merupakan solusi yang tak trivial. □

Solusi dari Contoh 2.15, berupa solusi tak trivial yang tak hingga banyaknya. Hal ini dikarenakan nilai s merupakan sembarang bilangan real. Contoh 2.15 ini bersesuaian dengan teorema berikut.

Teorema 2.5 *Suatu sistem persamaan linier homogen di mana variabelnya itu lebih banyak daripada persamaannya akan selalu mempunyai tak hingga banyaknya penyelesaian.*

Catatan: Teorema 2.5 ini hanya berlaku untuk sistem persamaan linier homogen.

LATIHAN 2.3

1. Manakah dari sistem persamaan linier homogen di bawah ini yang mempunyai solusi trivial dan mana pula yang mempunyai solusi tak trivial.

(a) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ 3x_3 = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ ax_1 + 2ax_2 = 0 \end{cases}$

2. Carilah solusi dari masing-masing persamaan linier homogen di bawah ini.

(a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

3. Tentukan nilai a agar sistem persamaan linier homogen berikut mempunyai solusi tak trivial.

$$x_1 + (a-1)x_2 = 0$$
$$(a-1)x_1 + \qquad x_2 = 0$$

4. Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$, carilah matriks kolom B, sedemikian sehingga $AB = 0$.

5. Buktikan Teorema 2.5.

2.4 PENYELESAIAN SPL DENGAN MATLAB

Untuk menyelesaikan sistem persamaan linier (SPL) dengan Matlab, kita menggunakan matriks yang diperbesar. Masing-masing penyelesaian sistem persamaan linier yang ada pada bagian 2.2 dan 2.3 akan dijelaskan sebagai berikut.

2.4.1 Operasi Baris Elementer

Kita tinjau kembali Contoh 2.9. Pada contoh tersebut matriks diperbesarnya adalah:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Pada Matlab, input matriks:

```
>> A=[2 1 -2 -2; 1 1 1 6; 3 -2 2 5]
A =
2    1   -2   -2
1    1    1    6
3   -2    2    5
```

Kemudian tukarkan baris pertama dengan baris kedua. Perintah yang dilakukan adalah

```
>> simpan=A(1,:) ; %tanda " ; " tujuannya agar tidak tampil di layar
>> A(1,:)=A(2,:) ;
>> A(2,:)=simpan    %lalu tekan enter
A =
    1    1    1    6
    2    1   -2   -2
    3   -2    2    5
```

Tambahkan -2 kali baris pertama dengan baris kedua, dan susun menjadi baris kedua. Kemudian tambahkan -3 kali baris pertama dengan baris ketiga, dan susun menjadi baris ketiga.

```
>> A(2,:)= -2*A(1,:)+A(2,:);
>> A(3,:)= -3*A(1,:)+A(3,:)
A =
    1    1    1    6
    0   -1   -4  -14
    0   -5   -1  -13
```

Kalikan baris kedua dengan -1, sehingga diperoleh:

```
>> A(2,:)=-1*A(2,:)
A =
    1    1    1    6
    0    1    4   14
    0   -5   -1  -13
```

Tambahkan 5 kali baris kedua dengan baris ketiga, dan susun menjadi baris ketiga.

```
>> A(3,:)=5*A(2,:)+A(3,:)
A =
    1    1    1    6
    0    1    4   14
    0    0   19   57
```

Kalikan baris ketiga dengan $\frac{1}{19}$, sehingga diperoleh:

```
>> A(3,:)=1/19 * A(3,:)
A =
    1    1    1    6
    0    1    4   14
    0    0    1    3
```


Bentuk matriks terakhir merupakan bentuk eselon baris. Kita sudah dapat mencari solusinya dengan teknik substitusi mundur. Selanjutnya kita lakukan proses operasi baris elementer kembali agar diperoleh bentuk eselon tereduksi.

Tambahkan -4 kali baris ketiga dengan baris kedua, dan susun menjadi baris kedua. Kemudian tambahkan -1 kali baris ketiga dengan baris kedua, dan susun menjadi baris pertama.

```
>> A(2,:)=-4*A(3,:)+A(2,:);
>> A(1,:)=-1*A(3,:)+A(1,:)
A =
    1    1    0    3
    0    1    0    2
    0    0    1    3
```

Tambahkan -1 kali baris kedua dengan baris pertama, dan susun menjadi baris pertama.

```
>> A(1,:)=-1*A(2,:)+A(1,:)
A =
    1    0    0    1
    0    1    0    2
    0    0    1    3
```

Bentuk matriks terakhir merupakan bentuk eselon baris tereduksi. Oleh karena itu, solusi dari Contoh 2.9 adalah $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, dan $x_3 = 3$.

2.4.2 Eliminasi Gauss-Jordan

Pada bagian 2.4.3, telah kita ketahui bahwa dalam menyelesaikan sistem persamaan linier yang melibatkan matriks diperbesar harus berbentuk eselon baris tereduksi. Cara yang digunakan dalam operasi baris elementer pada Matlab sebelumnya juga dapat diterapkan pada eliminasi Gauss-Jordan. Namun di sini kita akan menggunakan perintah " *rref(A)* ", di mana A merupakan matriks yang diperbesar.

Pada Contoh 2.9, matriks yang diperbesar dari sistem persamaan liniernya adalah:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Pada Matlab, inputkan terlebih dahulu matriks yang diperbesar, lalu gunakan perintah " *rref(A)* ".

```
>> A=[2 1 -2 -2; 1 1 1 6; 3 -2 2 5]
A =
    2    1   -2   -2
    1    1    1    6
    3   -2    2    5
```

```
>> rref(A)
ans =
     1     0     0     1
     0     1     0     2
     0     0     1     3
```

Bentuk terakhir merupakan bentuk eselon baris tereduksi. Oleh karena itu, dapat kita simpulkan bahwa solusinya adalah $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, dan $x_3 = 3$.

Untuk persamaan linier homogen, operasi baris elementer dan perintah " *rref(A)* " pada Matlab juga bisa digunakan. Kita tinjau kembali Contoh 2.15, matriks diperbesar dari sistem persamaan linier homogen yaitu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pada Matlab, inputkan terlebih dahulu matriks yang diperbesar, lalu gunakan perintah " *rref(A)* ".

```
>> A=[1 1 1 1 0 ; 0 1 2 0 0 ; 2 0 1 -1 0]
A =
     1     1     1     1     0
     0     1     2     0     0
     2     0     1    -1     0
>> rref(A)
ans =
     1     0     0     0     0
     0     1     0     2     0
     0     0     1    -1     0
```

Dari bentuk terakhir, persamaan yang bersesuaian adalah:

$$x_1 = 0, \quad x_2 + 2x_4 = 0, \quad x_3 - x_4 = 0$$

Tetapkan $x_4 = s$, dengan s merupakan sembarang skalar real. Sehingga solusinya adalah $x_1 = 0$, $x_2 = -2s$, dan $x_3 = x_4 = s$.

LATIHAN 2.4

Kerjakanlah soal-soal di bawah ini dengan menggunakan Matlab.

1. Dengan operasi baris elementer, carilah bentuk eselon baris dan eselon baris tereduksi dari matriks di bawah ini.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 & 5 & 8 \\ 5 & 4 & 1 & -4 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 9 & 7 & 7 & 10 \\ 4 & 5 & 1 & 0 & 6 & 3 & 8 \\ 1 & -1 & 3 & -4 & 5 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & -4 & 3 & -6 & 1 & 4 \\ 4 & 6 & 5 & -8 & 8 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

2. Selesaikanlah soal nomor 1 dengan perintah " *rref(A)* ", di mana A merupakan matriks yang diperbesar.

DETERMINAN 3

Determinan merupakan materi yang cukup penting dalam aljabar linier. Determinan digunakan untuk mencari *invers* dari suatu matriks persegi, mencari *rank* (peringkat) dari suatu matriks dan menentukan solusi dari sistem persamaan linier. Pada bab ini akan diberikan penjelasan tentang determinan dari matriks persegi, beberapa metode pencarian determinan, *rank*, dan aturan Cramer.

3.1 DETERMINAN

Pada bagian ini akan kita bahas tentang determinan. Di sini perlu ditekankan, bahwa hanya matriks persegi saja yang mempunyai determinan. Berikut ini merupakan definisi dari determinan.

Definisi 3.1 *Determinan dari matriks persegi A, ditulis det(A), didefinisikan sebagai jumlah dari semua hasil kali elementer bertanda dari A.*

Dari Definisi 3.1, penulisan determinan dari suatu matriks persegi A tidak hanya *det(A)*, namun dapat juga ditulis sebagai $|A|$. Selanjutnya, hasil kali elementer bersesuaian dengan permutasi n unsur berbeda. Berikut ini diberikan definisi permutasi.

Definisi 3.2 *Permutasi dari n unsur berbeda adalah susunan n unsur berbeda dengan memperhatikan urutannya.*

Misalkan terdapat 2 buah unsur, yaitu 1,2. Susunan yang dapat dibentuk dari unsur 1,2 adalah 12 dan 21. Perhatikan susunan 21, ini berarti unsur 2 mendahului unsur 1. Apabila unsur yang lebih besar mendahului unsur yang lebih kecil, maka dikatakan sebagai *invers*. Banyaknya *invers* dari susunan 21 adalah 1. Untuk tiga buah unsur, perhatikan contoh berikut.

Contoh 3.1 Misalkan terdapat tiga buah unsur yaitu 1, 2, dan 3. Susunan 3 unsur berbeda yang dapat dibentuk adalah:

123, 132, 213, 231, 312, dan 321.

Sebanyak 6 buah susunan yang dapat dibentuk. Banyaknya *invers* dari masing-masing susunan dapat dilihat pada tabel berikut.

TABEL 3.1. PERMUTASI DAN INVERS DARI 3 UNSUR BERBEDA

Permutasi	Banyaknya invers	Alasan
123	0	Tidak ada unsur yang besar mendahului unsur yang kecil.
132	1	Unsur 3 mendahului unsur 2.
213	1	Unsur 2 mendahului unsur 1.
231	2	Unsur 2 mendahului unsur 1 dan unsur 3 juga mendahului unsur 1.
312	2	Unsur 3 mendahului unsur 1 dan 2.
321	3	Unsur 3 mendahului unsur 2 dan 1, kemudian unsur 2 mendahului unsur 1.

□

Untuk 2 buah unsur banyak permutasinya adalah 2. Dan untuk 3 buah unsur, banyak permutasinya adalah 6. Untuk *n* buah unsur, banyak permutasinya adalah *n!* (dibaca *n* faktorial) di mana $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$. Berikut ini diberikan definisi tentang permutasi genap dan permutasi ganjil.

Definisi 3.3 *Sebuah permutasi dikatakan genap apabila banyaknya invers dari susunannya adalah genap. Dan sebuah permutasi dikatakan ganjil apabila banyaknya invers dari susunannya adalah ganjil.*

Dari Contoh 3.1, dapat kita katakan bahwa susunan 123, 231, dan 312 adalah permutasi genap, karena banyaknya *invers* yang dihasilkan pada masing-masing susunan adalah 0, 2, dan 2. Adapun susunan 132, 213, dan 321 adalah permutasi ganjil, karena banyaknya *invers* yang dihasilkan pada masing-masing susunan adalah 1, 1, dan 3. Sebuah permutasi genap bertanda positif " + " dan sebuah permutasi ganjil bertanda " – ".

Misalkan *A* adalah matriks persegi berukuran *n x n*, matriks *A* dapat dituliskan sebagai:

$$A = A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Dan, hasil kali elementernya adalah:

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \quad (3.2)$$

Di mana $j_1, j_2, \ldots, j_n$ merupakan indeks yang berasal dari susunan permutasi unsur berbeda. Sebuah permutasi genap atau ganjil juga dapat dituliskan sebagai:

$$\in_{j1, j2, \ldots, jn} \quad (3.3)$$

Misalkan salah satu susunan dari 3 unsur berbeda yaitu 213. Permutasi genap atau ganjilnya dapat ditulis sebagai $\in_{213}$. Nilai dari $\in_{j1, j2, \ldots, jn}$ adalah +1, jika merupakan permutasi genap; dan -1, jika merupakan permutasi ganjil. Dengan menggunakan (3.2) dan (3.3), hasil kali elementer bertandanya adalah:

$$\in_{j1, j2, \ldots, jn} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \quad (3.4)$$

Dari Definisi 3.1 dan (3.4), determinan dari matriks persegi *A* adalah:

$$\det(A) = |A| = \sum \epsilon_{j_1, j_2, \ldots, j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \quad (3.5)$$

Diketahui dua buah matriks yang berukuran 2 x 2 dan3 x 3, yakni:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan (3.5), determinannya adalah:

$$\begin{aligned} |A| &= \sum \epsilon_{j_1 j_2} a_{1j_1} a_{2j_2} \\ &= \epsilon_{12} a_{11} a_{22} + \epsilon_{21} a_{12} a_{21} \\ &= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \end{aligned} \quad (3.6)$$

dan

$$\begin{aligned} |B| &= \sum \epsilon_{j_1 j_2 j_3} b_{1j_1} b_{2j_2} b_{3j_3} \\ &= \epsilon_{123} b_{11} b_{22} b_{33} + \epsilon_{132} b_{11} b_{23} b_{32} + \epsilon_{213} b_{12} b_{21} b_{33} \\ &\quad + \epsilon_{231} b_{12} b_{23} b_{31} + \epsilon_{312} b_{13} b_{21} b_{32} + \epsilon_{321} b_{13} b_{22} b_{31} \\ &= b_{11} b_{22} b_{33} - b_{11} b_{23} b_{32} - b_{12} b_{21} b_{33} + b_{12} b_{23} b_{31} \\ &\quad + b_{13} b_{21} b_{32} - b_{13} b_{22} b_{31} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Jika kita kelompokkan tanda positifnya dan tanda negatifnya dari (3.7), maka:

$$\begin{aligned} |B| = {} & b_{11} b_{22} b_{33} + b_{12} b_{23} b_{31} + b_{13} b_{21} b_{32} - b_{11} b_{23} b_{32} \\ & - b_{12} b_{21} b_{33} - b_{13} b_{22} b_{31} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Pada bagian 1.3.4, kita telah mengetahui tentang determinan dari matriks berukuran 2 x 2, yakni jika:

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ maka } \det(A)=ad-bc$$

Jika matriks A ditulis sebagai:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{maka} \det(A)=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12} \tag{3.9}$$

Dapat kita lihat bahwa bentuk (3.6) sama dengan bentuk (3.9).

Untuk matriks B yang berukuran 3 x 3, determinan matriks B dapat dicari dengan menggunakan *metode Sarrus*. Metode ini dilakukan dengan menggandengkan dua kolom pertama matriks B dan diletakkan di sebelah kanan matriks B, yakni:

$$\begin{array}{ccccc} & & (+) & (+) & (+) \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{31} & b_{32} \\ (-) & (-) & (-) & & \end{array}$$

Sehingga:

$$\begin{aligned} |B| &= b_{11}b_{22}b_{33}+b_{12}b_{23}b_{31}+b_{13}b_{21}b_{32}-b_{31}b_{22}b_{13} \\ &\quad -b_{32}b_{23}b_{11}-b_{33}b_{21}b_{12} \end{aligned} \tag{3.10}$$

Lihatlah bahwa bentuk (3.8) sama dengan bentuk (3.10).

Contoh 3.2 Tentukan determinan dari matriks berikut.

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan (3.9), diperoleh:

$$det(A)=3(2)-(-1)(4)=10$$

Dengan menggunakan (3.10), diperoleh:

$$\begin{aligned} det(B) &= 2(3)(3)+1(-1)(-1)+2(4)(1) \\ &\quad -(-1)(3)(2)-4(-1)(2)-3(1)(1) \\ &= 18+1+8+6+8-3=38 \end{aligned}$$

□

Catatan: Metode Sarrus hanya digunakan untuk matriks berukuran 3 x 3. Untuk matriks persegi yang ukurannya lebih dari 3 x 3 menggunakan metode lain.

Contoh 3.3 Dari matriks B pada Contoh 3.2, akan dicari (B^T).

$$B^T=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Determinan dari matriks B^T adalah:

$$\begin{aligned} \det(B^T) &= 2(3)(3)+1(4)(2)+(-1)(-1)(1) \\ &\quad -2(3)(-1)-(-1)(4)(2)-3(1)(1) \\ &= 18+8+1+6+8-3=38 \end{aligned}$$

□

Dari hasil pada Contoh 3.2 dan 3.3, kita simpulkan bahwa $det(B) = det(B^T)$. Hasil ini bersesuaian dengan teorema berikut.

Teorema 3.4 *Jika A adalah sembarang matriks persegi, maka* $det(A) = det(A^T)$.

Bukti. Dengan menggunakan (3.4), hasil kali elementer bertanda dari matriks A adalah:

$$\epsilon_{j_1,j_2,\supset,j_n} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

dan dengan menggunakan (3.5), diperoleh:

$$\det(A)=\sum \epsilon_{j_1,j_2,\ldots,j_n} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

Selanjutnya, hasil kali elementer bertanda dari matriks A^T adalah:

$$\epsilon_{j_1',j_2',\supset,j_n'} a_{1j_1'}a_{2j_2'}\cdots a_{nj_n'}$$

dan dengan menggunakan (3.5), diperoleh:

$$\det(A^T)=\sum \epsilon_{j_1',j_2',\ldots,j_n'} a_{1j_1'}a_{2j_2'}\cdots a_{nj_n'}$$

Karena pada hasil kali elementer memiliki 1 faktor dari setiap baris dan 1 faktor dari setiap kolom, hasil kali elementer bertanda dari matriks A^T dapat dituliskan sebagai:

$$\epsilon_{j_1'',j_2'',\supset,j_n''} a_{j_1''1}a_{j_2''2}\cdots a_{j_n''n},$$

yang memiliki 1 faktor dari setiap kolom dan 1 faktor dari setiap baris. Sehingga himpunan hasil kali elementer:

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=a_{j_1''1}a_{j_2''2}\cdots a_{j_n''n},$$

dan diikuti dengan tanda dari permutasi genap atau ganjil yang sama pula. Oleh karena itu, $det(A) = det(A^T)$. ■

Selanjutnya, determinan dari perkalian skalar matriks persegi dan perkalian dari dua buah matriks persegi tertuang dalam teorema berikut.

Teorema 3.5 *Misalkan A dan B adalah dua buah matriks persegi yang memiliki ukuran yang sama dan k adalah skalar, maka:*

(i) $det(kA) = k^n det(A)$

(ii) $det(A+B) \uparrow det(A) + det(B)$

(iii) $det(AB) = det(A)\, det(B)$

Bukti. Akan dibuktikan (i) yaitu $det(kA) = k^n\ det(A)$. Dari bentuk (3.5) kita ketahui bahwa:

$$det(A) = \sum \epsilon_{j_1,j_2,\ldots,j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

Karena pada matriks kA, setiap entri dari A dikalikan dengan k, diperoleh hasil kali elementer bertandanya yaitu:

$$\epsilon_{j_1,j_2,\supset,j_n} ka_{1j_1} ka_{2j_2} \cdots ka_{nj_n}$$

dan dengan (3.5), diperoleh:

$$\begin{aligned} det(kA) &= \sum \epsilon_{j_1,j_2,\ldots,j_n} ka_{1j_1} ka_{2j_2} \cdots ka_{nj_n} \\ &= \sum \epsilon_{j_1,j_2,\ldots,j_n} k^n a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \\ &= k^n \sum \epsilon_{j_1,j_2,\ldots,j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \\ &= k^n \det(A) \end{aligned}$$

Bukti (ii) dan (iii) diserahkan kepada pembaca sebagai latihan. ∎

Contoh 3.4 Misalkan diketahui dua buah matriks persegi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Tentukan:

a. $det(A)$ dan $det(B)$

b. $det(2A)$

c. $det(A+B)$

d. $det(AB)$

Untuk mencari a, kita dapat mengunakan metode Sarrus, sehingga diperoleh:

$$det(A) = 6 \text{ dan } det(B) = -10$$

Untuk mencari b, pertama carilah terlebih dahulu matriks $2A$, yaitu:

$$2A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \\ -2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan metode Sarrus, diperoleh:

$$det(2A) = 48.$$

Dengan menggunakan Teorema 3.5(i), diperoleh:

$$det(2A) = 2^n\ det(A) = 2^3\ (6) = 48.$$

Oleh karena itu, Teorema 3.5(i) terpenuhi.

Untuk mencari c, pertama carilah terlebih dahulu matriks $A + B$, yaitu:

$$A+B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan metode Sarrus, diperoleh:

$$det(A+B) = -12,$$

dan $det(A) + det(B) = 6 + (-10) = -4$. Oleh karena itu, $det(A+B) \neq det(A) + det(B)$ dan memenuhi Teorema 3.5(ii).

Untuk mencari d, pertama carilah terlebih dahulu matriks AB, yaitu:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -7 \\ 8 & 12 & 2 \\ -3 & -6 & -5 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan metode Sarrus, diperoleh:

$$det(AB) = -60.$$

Dengan menggunakan Teorema 3.5(iii), diperoleh:

$$det(AB) = det(A)\ \ det(B) = 6(-10) = -60.$$

Oleh karena itu, Teorema 3.5(iii) terpenuhi. □

Terkadang kita menemukan sebuah matriks yang determinannya adalah nol. Misalkan A adalah matriks persegi. Matriks A dikatakan singular jika $det(A) = 0$, dan dikatakan tak singular jika $det(A) \neq 0$.

Contoh 3.5 Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Dengan menggunakan cara seperti Contoh 3.2, diperoleh $det(A)$=0. □

Matriks pada Contoh 3.5 merupakan matriks singular, sedangkan matriks-matriks pada Contoh 3.2 sampai 3.4 merupakan matriks tak singular.

LATIHAN 3.1

1. Diketahui himpunan $A = \{1,2,3,4\}$. Tentukan permutasi genap atau ganjil dari permutasi berikut.

   (a) 2413

   (b) 3214

   (c) 3412

   (d) 4321

2. Buatlah sebuah matriks $A = [a_{ij}]$ seperti pada bentuk (3.1) yang berukuran 4 x 4 dan 5 x 5. Kemudian buatlah seluruh permutasi genap dan ganjilnya. Selanjutnya, buatlah rumusan determinan untuk matriks 4 x 4 dan 5 x 5. Catatan: permutasinya ada sebanyak $n!$
3. Manakah dari matriks-matriks berikut ini yang mempunyai determinan. Bila tidak memiliki determinan, berikan alasannya.

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -4 & -2 & -1 \\ -1 & -6 & -5 \\ -3 & -7 & -6 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix}$

(f) $A = \left[a_{ij}\right],\ i, j = 1, 2, \ldots, n$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, i < j \\ 0, i = j \\ -1, i > j \end{cases}$$

4. Dengan menggunakan bentuk (3.6) dan (3.7), tentukanlah determinan dari matriks berikut.

(a) $\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 7 & 2 \\ 4 & -2 & -5 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 7 & 4 & 8 \\ -4 & 10 & -5 \\ -6 & 2 & 9 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -7 \\ 6 & 1 & -3 \\ -4 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

5. Tentukan determinan matriks pada soal nomor 4 (b), (c), dan (d) dengan cara Sarrus.
6. Dengan menggunakan formula yang diperoleh pada soal nomor 2, tentukan determinan dari matriks berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & -5 \\ 3 & -3 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 6 & 6 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 & 6 & 4 \\ -1 & -4 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & 8 & -2 & 3 \\ 2 & -6 & -7 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Diketahui dua buah matriks $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ dan $Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \\ 5 & -1 & -4 \end{bmatrix}$.

   Buktikanlah $det(PQ) = det(P)\, det(Q)$.
8. Buktikanlah Teorema 3.5(ii).
9. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$. Buktikan bahwa $det(A) = det(A^T)$.
10. Dari matriks pada soal nomor 9, carilah nilai dari $det(-3A)$.
11. Carilah semua matriks bilangan bulat $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}$ yang memenuhi $A^2 + A - 2I = 0$ dan $det(A) = 4$.
12. Carilah nilai λ, jika matriks A merupakan matriks singular.

    (a) $A = \begin{bmatrix} \lambda + 3 & -1 \\ \lambda - 1 & \lambda - 4 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} \lambda & -2 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -\lambda & 3 - \lambda & 2\lambda + 3 \end{bmatrix}$.
13. Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} x - 1 & 4 \\ 4 & x + 5 \end{bmatrix}$, untuk suatu bilangan real x. Tentukan nilai terkecil dari $\det(A)$.

3.2 BEBERAPA METODE UNTUK MENCARI DETERMINAN

Selain metode Sarrus dan hasil kali elementer bertanda, terdapat beberapa metode untuk mencari determinan, di antaranya:

1. Menggunakan reduksi baris.
2. Menggunakan minor dan kofaktor.
3. Menggunakan transformasi elementer.

Masing-masing dari ketiga metode tersebut, dijelaskan sebagai berikut.

3.2.1 Menggunakan Reduksi Baris

Pada bagian ini kita gunakan reduksi baris untuk mencari determinan dari suatu matriks persegi. Untuk mereduksi baris kita gunakan operasi baris elementer sehingga diperoleh bentuk eselon baris yang berupa matriks segitiga atas (lihat bagian 2.2.2). Berikut ini diberikan dua buah bentuk matriks persegi yang sangat mudah sekali dihitung determinannya meskipun ukuran matriksnya sangat besar, yakni tercantum dalam Teorema 3.6 dan 3.7.

Teorema 3.6 *Jika matriks persegi A mengandung sebaris angka nol, maka det(A) = 0.*

Bukti. Anggaplah matriks A berukuran $n \times n$. Misalkan baris ke-r ($1 \leqslant r \leqslant n$) merupakan baris yang seluruh elemennya bernilai nol. Dari bentuk (3.5), determinan dari matriks persegi A dapat dituliskan sebagai:

$$\det(A) = \sum \epsilon_{j_1, j_2, \ldots, j_r, \ldots, j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{rj_r} \cdots a_{nj_n}.$$

Karena pada setiap hasil kali elementer pada *det(A)* mempunyai 1 faktor dari setiap baris dan 1 faktor dari setiap kolom, ini mengakibatkan setiap hasil kali elementernya memiliki 1 faktor dari baris ke-r. Oleh karena itu, setiap hasil kali elementernya bernilai nol, dan *det(A)* = 0. ■

Teorema 3.7 *Jika matriks persegi A merupakan matriks segitiga, maka det(A)* $= a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$.

Bukti diserahkan kepada pembaca sebagai latihan. Pembaca dapat menggunakan hasil kali elementer bertanda.

Berikut ini diberikan contoh matriks dari Teorema 3.6 dan Teorema 3.7.

Contoh 3.6 Hitunglah determinan dari matriks-matriks berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 2 & 0 \\ -4 & 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Karena matriks A mengandung sebaris angka nol, menurut Teorema 3.6 *det(A)* = 0.

Matriks B dan C masing-masing merupakan matriks segitiga atas dan matriks segitiga bawah. Menurut Teorema 3.7, determinan dari matriks segitiga adalah hasil kali diagonal utamanya. Sehingga:

$$det(B) = 2(-1)(4) = -8, \text{ dan } det(C) = 2(-1)(2)(3) = -12. \qquad \square$$

Bagaimana bila matriksnya bukan merupakan salah satu dari matriks pada Teorema 3.6 dan 3.7? Untuk menenentukan determinannya, dapat kita gunakan reduksi baris. Reduksi baris yang nantinya dilakukan harus memenuhi beberapa langkah berikut.

1. Gunakan operasi baris elementer yaitu kepala baris berupa angka 1.
2. Untuk dua buah baris yang dipertukarkan (terjadi pivot), kalikan determinannya dengan (Teorema 3.8(ii)).
3. Jika kepala baris berupa bilangan k, k ubahlah menjadi 1 dan kalikan determinannya dengan k.
4. Setelah matriksnya berbentuk matriks segitiga atas, cari determinannya dengan menggunakan Teorema 3.7.

Agar pembaca dapat memahami tentang pencarian determinan dengan reduksi baris, perhatikan contoh berikut.

Contoh 3.7 Tentukan determinan matriks berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Lihatlah kepala baris pada baris pertama adalah 1, sehingga tidak perlu kita lakukan operasi baris elementer di baris pertama. Sekarang pada baris kedua dan ketiga kita lakukan operasi baris elementer.

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{matrix} R_2 \leftarrow -3R_1 + R_2 \\ \sim \\ R_3 \leftarrow -2R_1 + R_3 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Karena kepala baris kedua adalah -2, ubahlah menjadi angka 1, dan kalikanlah determinannya dengan -2, yakni:

$$\begin{matrix} R_2 \leftarrow -\frac{1}{2}R_2 \\ \sim \end{matrix} \; -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix},$$

dan selanjutnya:

$$\begin{matrix} R_3 \leftarrow 3R_2 + R_3 \\ \sim \end{matrix} \; -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{13}{2} \end{vmatrix}.$$

Karena kepala baris pada baris ketiga adalah $-\frac{13}{2}$, ubahlah menjadi 1, dan kalikan determinannya dengan $-\frac{13}{2}$. Sehingga diperoleh:

$$\det(A) = -2\left(-\frac{13}{2}\right)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 13(1) = 13. \qquad \square$$

Di sisi lain, kita dapat mengubah matriks persegi menjadi matriks segitiga atas tanpa membuat kepala barisnya menjadi angka 1. Untuk lebih jelasnya perhatikan contoh berikut.

Contoh 3.8 Tentukan determinan matriks pada Contoh 3.7. Matriksnya adalah:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determinan dari matriks A adalah:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_2 \leftarrow -3R_1 + R_2 \\ \sim \\ R_3 \leftarrow -2R_1 + R_3 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

selanjutnya:

$$\begin{matrix} R_2 \leftarrow -\frac{3}{2}R_2 + R_3 \\ \sim \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{2} \end{vmatrix}.$$

Bentuk terakhir merupakan matriks segitiga atas. Dengan menggunakan Teorema 3.7, determinannya adalah:

$$\det(A) = 1(-2)\left(-\frac{13}{2}\right) = 13.$$

Apakah hasil ini sama dengan hasil yang kita peroleh dengan menggunakan metode Sarrus? Pembaca dapat mencobanya.

Berikut ini diberikan teorema yang memperlihatkan pengaruh operasi baris elementer terhadap determinan.

Teorema 3.8 *Misalkan A adalah matriks persegi yang berukuran n x n.*
(i) *Jika A' adalah matriks yang dihasilkan bila salah satu baris dari A dikalikan dengan bilangan skalar k, maka det(A') = k.det(A).*
(ii) *Jika A' adalah matriks yang dihasilkan bila dua baris dari A dipertukarkan, maka det(A') = −det(A).*
(iii) *Jika A' adalah matriks yang dihasilkan bila kelipatan suatu baris dari A ditambahkan pada baris lain, maka det(A') = det(A).*

Bukti diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

Contoh 3.9 Carilah determinan dari matriks-matriks berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Jika kita cari determinan dari masing-masing matriks tersebut dengan metode Sarrus, maka determinannya adalah:

$$det(A) = 13,\ det(B) = 26,\ det(C) = -13,\ det(D) = 13.$$

Kalau kita perhatikan matriks A merupakan matriks pada Contoh 3.7, sehingga jelas determinannya adalah 13. Sekarang perhatikan matriks B. Baris ketiga pada matriks B merupakan 2 kali dari baris ketiga matriks A. Adapun baris pertama dan keduanya adalah sama. Sehingga menurut Teorema 3.8(i),

$$det(B) = 2\ det(A) = 26.$$

Perhatikan matriks C. Terlihat bahwa baris pertama dan ketiga dari matriks C merupakan pertukaran baris pertama dan ketiga dari matriks A. Adapun baris kedua matriks C sama dengan baris kedua matriks A. Sehingga menurut Teorema 3.8(ii),

$$det(C) = -det(A) = -13.$$

Perhatikan matriks D. Baris pertama dan kedua dari matriks D sama dengan baris pertama dan kedua dari matriks A. Perbedaannya terletak pada baris ketiga. Kalau kita lihat kembali, baris ketiga dari matriks D merupakan operasi baris elementer dari matriks A, yaitu -1 kali baris kedua matriks A ditambah dengan baris ketiga dari matriks A. Sehingga menurut Teorema 3.8(iii),

$$det(D) = det(A) = 13.$$

3.2.2 Menggunakan Minor dan Kofaktor

Metode selanjutnya yang dapat kita gunakan untuk mencari determinan dari suatu matriks persegi adalah minor dan kofaktor. Berikut ini diberikan definisi tentang minor dan kofaktor.

Definisi 3.9 *Misalkan A adalah sebuah matriks persegi. Minor dari entri a_{ij}, ditulis $|M_{ij}|$, didefinisikan sebagai determinan dari submatriks A jika baris ke-i dan kolom ke-j dihapuskan. Minor bertanda, $(-1)^{i+j}|M_{ij}|$ disebut sebagai kofaktor entri a_{ij} dan ditulis dengan C_{ij}.*

Misalkan matriks A berukuran 3 x 3.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

Minor dari entri a_{11} diperoleh dengan menutup baris pertama dan kolom pertama, sehingga:

$$|M_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Dan kofaktor entri a_{11} adalah:

$$C_{11} = (-1)^{1+1}|M_{11}| = |M_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Minor dari entri a_{12} diperoleh dengan menutup baris pertama dan kolom kedua, sehingga:

$$|M_{11}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Dan kofaktor entri a_{12} adalah:

$$C_{12} = (-1)^{1+2}|M_{12}| = -|M_{12}| = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Dengan cara yang sama $|M_{13}|$ dan C_{13} yaitu:

$$|M_{11}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ dan } C_{13} = (-1)^{1+3}|M_{13}| = |M_{13}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Perhatikan bahwa kofaktor $C_{ij} = \pm|M_{ij}|$, dan tanda + dan − yang menjadikan perbedaan antara kofaktor dan minor. Agar pembaca mudah memahaminya, tanda dari kofaktor adalah pergantian tanda + atau −. Untuk matriks persegi yang berukuran $n \times n$, tanda dari kofaktor adalah:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

Determinan dari suatu matriks persegi dapat diperoleh dari entri-entri pada sebuah baris dengan kofaktornya maupun entri pada sebuah kolom dan kofaktornya. Dengan kata lain, determinan dapat dihasilkan oleh kofaktor setiap baris dan kofaktor setiap kolom. Dari matriks (3.11), determinannya dengan menggunakan kofaktor baris adalah:

$$\begin{aligned} det(A) &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} \\ &= a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23} \\ &= a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33} \end{aligned}$$

Selanjutnya determinan yang diperoleh dengan menggunakan kofaktor kolomnya adalah:

$$det(A) = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31}$$

$$\begin{aligned} &= a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32} \\ &= a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33} \end{aligned}$$

Agar pembaca dapat memahami tentang pencarian determinan dengan minor dan kofaktor, perhatikan contoh berikut.

Contoh 3.10 Tentukan determinan dari matriks pada Contoh 3.7.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Cara pertama. Kita gunakan kofaktor dari baris pertama. Kita cari kofaktor dari a_{11}, a_{12}, dan a_{13}.

Nilai $a_{11} = 1$, dan kofaktornya adalah:

$$C_{11} = (-1)^{1+1}|M_{11}| = |M_{11}| = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

Nilai $a_{12} = 2$, dan kofaktornya adalah:

$$C_{12} = (-1)^{1+2}|M_{12}| = -|M_{12}| = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

Nilai $a_{13} = -1$, dan kofaktornya adalah:

$$C_{13} = (-1)^{1+3}|M_{13}| = |M_{13}| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5.$$

Sehingga determinannya adalah:

$$\begin{aligned} det(A) &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} \\ &= 1(4) + 2(2) + (-1)(-5) = 13. \end{aligned}$$

Cara kedua. Kita gunakan kofaktor dari kolom pertama. Kita cari kofaktor dari a_{11}, a_{21}, dan a_{31}.

Nilai $a_{11} = 1$, dan kofaktornya adalah $C_{11} = 4$ dari hasil pada cara pertama.

Nilai $a_{21} = 3$, dan kofaktornya adalah:

$$C_{21} = (-1)^{2+1}|M_{21}| = -|M_{21}| = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5.$$

Nilai $a_{31} = 2$, dan kofaktornya adalah:

$$C_{31} = (-1)^{3+1}|M_{31}| = |M_{31}| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 12.$$

Sehingga determinannya adalah:

$$\begin{aligned} det(A) &= a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31} \\ &= 1(4) + 3(-5) + 2(12) = 13 \end{aligned}$$ □

Dengan cara yang sama, kita dapat mencari determinan dari matriks persegi yang berukuran lebih dari 3 x 3. Perhatikan contoh berikut.

Contoh 3.11 Carilah determinan dari matriks:

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Pada Contoh 3.10, determinan merupakan jumlah dari perkalian-perkalian suatu entri dengan kofaktornya. Jika entrinya adalah nol, maka hasil perkaliannya adalah nol pula. Karena setiap bilangan yang dikalikan dengan nol, hasilnya adalah nol. Oleh karena itu, kita pilih saja baris atau kolom yang mempunyai banyak entri nol, jika ada. Determinan dari matriks A tersebut adalah:

$$\begin{aligned} det(A) &= a_{31}C_{31}+a_{32}C_{32}+a_{33}C_{33}+a_{34}C_{34} \\ &= a_{31}|M_{31}|-a_{32}|M_{32}|+a_{33}|M_{33}|-a_{34}|M_{34}| \\ &= 0\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix} -1\begin{vmatrix} 4 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & -4 \\ -1 & -3 & -1 \end{vmatrix} +2\begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & -4 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} -0\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Determinan dari masing-masing minor dapat dicari dengan menggunakan cara Sarrus. Sehingga diperoleh:

$$det(A) = 0-1(-91)+2(14)-0 = 91+28 = 119$$

Apakah sama hasilnya dengan menggunakan reduksi baris? Pembaca dapat mencobanya sebagai latihan.

□

Catatan: Semakin banyak angka nol pada suatu baris atau kolom, maka akan semakin mudah dicari determinannya.

3.2.3 Menggunakan Transformasi Elementer

Transformasi elementer merupakan suatu cara pencarian determinan yang menggunakan beberapa operasi elementer (penjumlahan dan perkalian) pada baris atau kolom. Pada transformasi elementer entri-entri pada suatu baris atau kolom nantinya adalah nol kecuali entri terpilihnya. Langkah-langkah yang digunakan adalah:

1. Tentukan pivot terpilih. Pivot terpilih merupakan entri tak nol pada suatu baris atau kolom yang merupakan pembagi bersama terbesar dari entri-entri pada baris atau kolom tersebut.
2. Penjumlahan baris ke-i dengan baris ke-j dinyatakan dengan H_{ij}. Selanjutnya penjumlahan kolom ke-i dan kolom ke-j dinyatakan dengan K_{ij}.
3. Penjumlahan pada elemen-elemen baris ke-i dengan λ kali elemen-elemen dari baris ke-j, di mana λ suatu skalar, dinyatakan dengan $H_{ij}^{(\lambda)}$ (transformasi baris). Penjumlahan pada elemen-elemen kolom ke-i dengan k kali elemen-elemen dari kolom ke-j, dinyatakan dengan $K_{ij}^{(\lambda)}$ (transformasi kolom).
4. Menghitung determinan matriks A, yaitu:

$$det(A)=(-1)^{i+j}a_{ij}|M_{ij}|.$$

Di mana a_{ij} adalah pivot terpilih, dan M_{ij} adalah matriks minor dari hasil transformasi elementer.

5. Jika kita ingin mengubah elemen-elemen pada baris ke-i menjadi nol kecuali pivot terpilih, lakukan transformasi kolom. Dan, jika kita ingin mengubah elemen-elemen pada kolom ke-i menjadi nol kecuali pivot terpilih, lakukan transformasi baris.

Pada transformasi elementer, hasil transformasi elementernya memberikan nilai determinan yang sama dari matriks semula.

Contoh 3.12 Tentukan determinan dari matriks pada Contoh 3.7.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Cara pertama. Kita gunakan transformasi kolom elementer. Nantinya keseluruhan entri pada baris yang memuat pivot terpilih bernilai 0 kecuali entri pivot terpilih. Tetapkan pivot, misalkan kita pilih entri $a_{11}=1$ sebagai pivot pada baris pertama. Karena pada baris pertama, a_{11} membagi entri yang lain pada baris tersebut. Kita ubah entri-entri pada kolom kedua dengan menambahkan -2 kali kolom pertama dengan kolom kedua ditulis dengan $K_{21}^{(-2)}$ yaitu:

$$det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{K_{21}^{(-2)}}{\sim} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

Kemudian ubah entri-entri pada kolom ketiga dengan menambahkan 1 kali kolom pertama dengan kolom ketiga ditulis dengan $K_{31}^{(1)}$ yaitu:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} \overset{K_{21}^{(1)}}{\sim} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 7 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

Sehingga:

$$\det(A) = 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-2 & 7\\ -3 & 4\end{vmatrix} = 1(-8+21) = 13.$$

Cara kedua. Kita gunakan transformasi baris elementer. Nantinya keseluruhan entri pada kolom yang memuat pivot terpilih bernilai 0 kecuali entri pivot terpilih. Tetapkan pivot, misalkan kita pilih entri $a_{32} = 1$ sebagai pivot pada kolom kedua. Karena pada kolom kedua, a_{32} membagi entri yang lain pada kolom tersebut. Kita ubah entri-entri pada baris pertama dengan menambahkan −2 kali baris ketiga dengan baris pertama ditulis dengan $H_{13}^{(-2)}$ yaitu:

$$det(A) = \begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 4 & 4\\ 2 & 1 & 2\end{vmatrix} \underset{\sim}{H_{13}^{(-2)}} \begin{vmatrix}-3 & 0 & -5\\ 3 & 4 & 4\\ 2 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

Kemudian ubah entri-entri pada baris kedua dengan menambahkan −4 kali baris ketiga dengan baris kedua ditulis dengan $K_{23}^{(-4)}$ yaitu:

$$\begin{vmatrix}-3 & 0 & -5\\ 3 & 4 & 4\\ 2 & 1 & 2\end{vmatrix} \underset{\sim}{H_{23}^{(-4)}} \begin{vmatrix}-3 & 0 & -5\\ -5 & 0 & -4\\ 2 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

Sehingga $\det(A) = 1(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}-3 & -5\\ -5 & -4\end{vmatrix} = -1(12-25) = 13.$ □

Contoh 3.13 Carilah determinan matriks pada Contoh 3.11.

$$A = \begin{vmatrix}4 & 2 & -1 & 4\\ 3 & 5 & -2 & -4\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & -3 & -1\end{vmatrix}$$

Kita gunakan transformasi kolom elementer pada baris ketiga, karena pada baris ketiga terdapat dua buah angka nol. Pilihlah $a_{32} = 1$ sebagai pivot, sehingga:

$$\begin{vmatrix}4 & 2 & -1 & 4\\ 3 & 5 & -2 & -4\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & -3 & -1\end{vmatrix} \underset{\sim}{K_{32}^{(-2)}} \begin{vmatrix}4 & 2 & -5 & 4\\ 3 & 5 & -12 & -4\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -3 & -1\end{vmatrix}$$

Sehingga:

$$det(A) = (-1)^{3+2} a_{32}|M_{32}|$$

$$= -1\begin{vmatrix}4 & -5 & 4\\ 3 & -12 & -4\\ -1 & -3 & -1\end{vmatrix} = -1(-119) = 119.$$ □

LATIHAN 3.2

1. Tanpa menggunakan langkah yang rumit, carilah nilai determinan dari matriks-matriks berikut.

(a) $\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0\\ 2 & 7 & 0\\ -3 & 5 & -4\end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix}-1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & -4\\ -1 & 2 & 3\end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix}3 & 7 & 9 & 6\\ 0 & 1 & 0 & -3\\ 0 & 0 & -6 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 8\end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix}-3 & 2 & 1 & -1\\ 1 & -3 & -2 & 2\\ -4 & 6 & 2 & 5\\ 2 & -6 & -4 & 4\end{vmatrix}$

2. Dengan reduksi baris, carilah nilai determinan dari matriks-matriks berikut.

(a) $\begin{bmatrix}4 & 5 & 6\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}0 & 4 & -4\\ 3 & -2 & 1\\ -1 & 2 & 3\end{bmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix}2 & -1 & -4 & 3\\ 1 & 4 & 1 & -1\\ -3 & 2 & -3 & 5\\ -1 & 3 & 5 & -2\end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix}-5 & -2 & 7 & -4\\ 6 & 2 & -6 & 6\\ 0 & 0 & -4 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 8\end{vmatrix}$

3. Carilah determinan dari soal nomor 2 dengan menggunakan minor dan kofaktor.
4. Carilah determinan dari soal nomor 2 dengan menggunakan transformasi elementer.
5. Buktikan bahwa jika suatu matriks persegi A mempunyai sebuah kolom yang entri-entrinya adalah nol, maka $det(A) = 0$.
6. Dengan menggunakan transformasi kolom elementer dan hasil pada soal nomor 5, buktikanlah bahwa:

$$\begin{vmatrix}a+b & c & 1\\ a+c & b & 1\\ b+c & a & 1\end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix}1 & c & 1\\ 1 & b & 1\\ 1 & a & 1\end{vmatrix} = 0.$$

7. Perlihatkanlah bahwa:

$$\begin{vmatrix}a_1^2 & a_1 & 1\\ a_2^2 & a_2 & 1\\ a_3^2 & a_3 & 1\end{vmatrix} = -(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)$$

8. Jika $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 10$, maka tentukan $\begin{vmatrix} 2a+d & a & 4a+2d+g \\ 2b+e & b & 4b+2e+h \\ 2c+f & c & 4c+2f+i \end{vmatrix}$.

9. Carilah determinan dari matriks $A = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{bmatrix}$. Periksalah apakah $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix}$? Jadi, bila $A_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $A_2 = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$, sehingga matriks A dapat dituliskan sebagai $A = \text{diag}(A_1, A_2)$, dan $|A| = |A_1||A_2|$.

10. Diketahui matriks $A = [a_{ij}]$ berukuran 10 x 10. Tentukanlah determinan matriks A jika:

    (a) $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ untuk } i+j=10 \\ 0, \text{ untuk } i+j \neq 10 \end{cases}$ (b) $a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j} & \text{jika } i \neq j \\ 2 & \text{jika } i = j \end{cases}$

11. Misalkan matriks $A = [a_{ij}]$ berukuran $n \times n$. Jika entri $a_{ij} = k$, untuk suatu bilangan skalar k, maka buktikanlah bahwa A merupakan matriks singular.
12. Buktikanlah Teorema 3.7.
13. Dari soal nomor 7 (a) dan (b), buatlah sebuah formula dari *det(A)* bila matriks A berukuran $n \times n$.
14. Buktikanlah Teorema 3.8 (i) dan (ii).
15. Buktikan bahwa jika matriks persegi A memiliki dua baris yang identik, maka *det(A)* = 0.
16. Buktikan bahwa jika matriks persegi A memiliki dua kolom yang identik, maka *det(A)* = 0.

3.3 RANK MATRIKS DAN ATURAN CRAMER

3.3.1 Rank Matriks

Dalam pengertian sederhana *rank* adalah peringkat. Berikut ini diberikan definisi tentang *rank* matriks.

Definisi 3.10 *Suatu matriks tak nol A dikatakan memiliki rank m jika paling sedikit satu dari determinan submatriks (minor) A yang berukuran m x m tidak sama dengan nol. Adapun determinan submatriks yang berukuran (m + 1) x (m + 1) adalah nol.*

Dari Dari Definisi 3.10, jika A adalah matriks persegi yang berukuran $n \times n$, dan $det(A) \neq 0$, maka $rank(A) = n$. Jadi, matriks tak singular memiliki *rank* n. Jika A adalah matriks nol, maka $rank(A) = 0$. Jelaslah bahwa pada matriks nol, keseluruhan entrinya adalah nol, sehingga setiap submatriksnya memi-

liki entri-entri nol pula, dan mengakibatkan determinannya sama dengan nol.

Contoh 3.14 Dari matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & -6 \end{bmatrix}$, *det(A)* = 0. Untuk submatriks yang berukuran 2 x 2, misalnya $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, lalu $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$. Karena untuk beberapa submatriks yang berukuran 2 x 2 determinannya tidak sama dengan nol, maka *rank*(A) = 2.

Contoh 3.15 Diketahui matriks:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Karena matriks A mengandung 2 baris angka nol, Teorema 3.6 menjamin bahwa *det(A)* = 0. Submatriks berukuran 3 x 3 juga mengandung sebaris angka nol, sehingga determinannya juga sama dengan nol. Submatriks yang berukuran 2 x 2 mengandung sebaris angka nol atau satu kolom angka nol, kecuali $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$. Sehingga keseluruhan determinan submatriks yang berukuran 2 x 2 sama dengan nol. Selanjutnya, submatriks yang berukuran 1 x 1, terdapat beberapa unsur yang bukan nol yaitu -1 dan 1. Oleh karena itu, *rank*(A) = 1. □

Pada Contoh 3.14 dan 3.15 hanya memperlihatkan *rank* dari suatu matriks persegi. Bagaimana bila matriksnya berukuran $m \times n$? Perhatikan contoh berikut.

Contoh 3.16 *Rank* dari matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ adalah 2. Hal ini dikarenakan determinan submatriks yang berukuran 2 x 2 dari A yaitu $\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ dan $\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, walaupun determinan submatriks lainnya yaitu $\begin{vmatrix} 8 & -4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$ □

Dari Contoh 3.16, *rank* suatu matriks dapat ditentukan bila terdapat sedikitnya satu dari determinan submatriks yang berukuran $m \times m$ tidak sama dengan nol.

Rank dari suatu matriks juga dapat dicari dengan menggunakan operasi baris elementer. Contoh berikut memperlihatkan cara penentuan *rank* suatu matriks dengan operasi baris elementer.

Contoh 3.17 Dari matriks pada Contoh 3.14, yaitu:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 6\\ -2 & -1 & -3\\ 3 & -2 & -6\end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan operasi baris elementer, kita bentuk sebuah matriks segitiga, atas yaitu:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 6\\ -2 & -1 & -3\\ 3 & -2 & -6\end{vmatrix}\begin{matrix}R_2\leftarrow 2R_1+R_2\\ \sim\\ R_3\leftarrow -3R_1+R_3\end{matrix}\begin{vmatrix}1 & 2 & 6\\ 0 & 3 & 9\\ 0 & -8 & -24\end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix}R_2\leftarrow \frac{1}{3}R_2\\ \sim\\ R_3\leftarrow 8R_2+R_3\end{matrix}\begin{vmatrix}1 & 2 & 6\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

Dari bentuk terakhir, terlihat keseluruhan entri pada baris ketiga adalah nol. Sehingga *rank*(A) = 2. □

3.3.2 Aturan Crammer

Aturan Crammer digunakan untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan linier tak homogen yang terdiri dari n buah persamaan dengan *n* variabel. Pada Definisi 2.2 telah kita bicarakan tentang sistem persamaan linier, dengan *m* = *n*, yaitu:

$$\begin{matrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots\\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{matrix} \tag{3.12}$$

Bentuk (3.12), sama dengan persamaan matriks

$$AX=B \tag{3.13}$$

Dengan *A* merupakan matriks koefisien yang berukuran *n x n*, dan *B* adalah matriks konstan yang berukuran *n x 1*. Persamaan tersebut dikatakan tak homogen apabila B ≠ 0, artinya matriks *B* bukan merupakan matriks nol. Bentuk (3.13) akan memiliki tepat satu solusi apabila *det(A)* ≠ 0. Berikut ini diberikan langkah-langkah untuk menentukan solusi dari sistem persamaan linier dengan aturan Crammer, yaitu:

1. Menentukan matriks koefisien *A* dan matriks konstan *B*.
2. Carilah *det(A)*. Jika *det(A)* = 0, maka sistem persamaan liniernya memiliki tak hingga banyaknya solusi. Jika *det(A)* ≠ 0, maka sistem persamaan liniernya memiliki tepat satu buah solusi.

3. Buatlah matriks A_i, di mana *i = 1, 2, ... n*. Matriks A_i merupakan matriks persegi berukuran *n x n* di mana kolom ke-*i* dari matriks *A* digantikan dengan matriks *B*.
4. Carilah $det(A_i)$.
5. Hitunglah solusinya dengan formula:

$$x_i=\frac{det(A_i)}{det(A)}$$

Contoh 3.18 Misalkan terdapat sistem persamaan linier tiga variabel.

$$\begin{aligned}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3&=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3&=b_2\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3&=b_3\end{aligned}$$

Terlebih dahulu, tentukan matriks koefisien *A* dan matriks konstan *B*, yaitu:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix} \text{ dan } B=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix}$$

Selanjutnya bentuklah matriks A_1, A_2, dan A_3. Matriks persegi A_1 diperoleh dengan menggantikan kolom ke-1 pada matriks *A* dengan matriks *B*, yaitu:

$$A_1=\begin{bmatrix}b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$

Dengan cara yang sama, kita dapat tentukan matriks A_2 dan A_3 masing-masing adalah:

$$A_2=\begin{bmatrix}a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{bmatrix}, \text{ dan } A_3=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{bmatrix}.$$

Selanjutnya nilai dari x_1, x_2, dan x_3 adalah:

$$x_1=\frac{det(A_1)}{det(A)},\ x_2=\frac{det(A_2)}{det(A)},\ \text{dan } x_3=\frac{det(A_3)}{det(A)}$$ □

Contoh 3.19 Selesaikan sistem persamaan linier di bawah ini.

(a) $\begin{cases}2x+3y=1\\ x-2y=4\end{cases}$

(b) $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=2\\ 3x_1+4x_2+4x_3=23\\ 2x_1+x_2+2x_3=10\end{cases}$

Untuk menjawab (a), kita tentukan matriks koefisien A dan matriks konstannya B terlebih dahulu, yakni:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\1 & -2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}.$$

Di mana $det(A) = -7$. Selanjutnya kita tetapkan matriks A_1 dan A_2 yang masing-masing merupakan matriks yang dihasilkan dengan menggantikan kolom pertama matriks A dengan B dan menggantikan kolom kedua dari matriks A dengan dengan B, yakni:

$$A_1=\begin{bmatrix}1 & 3\\4 & -2\end{bmatrix}\text{ dan }A_2=\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 4\end{bmatrix}.$$

Di mana $det(A_1) = -2 - 12 = -14$, dan $det(A_2) = 8 - 1 = 7$. Sehingga solusi persamaannya adalah:

$$x=\frac{det(A_1)}{det(A)}=\frac{-14}{-7}=2,\ y=\frac{det(A_2)}{det(A)}=\frac{7}{-7}=-1$$

Selanjutnya kita selesaikan bagian (b). Dengan menggunakan cara yang sama dengan (a), kita tentukan matriks koefisien dan matriks konstannya terlebih dahulu, yaitu:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\3 & 4 & 4\\2 & 1 & 2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2\\23\\10\end{bmatrix}.$$

Pada Contoh 3.7, telah kita ketahui bahwa $det(A) = 13$. Sekarang kita tentukan A_1, A_2, dan A_3 beserta determinannya, yaitu:

$$A_1=\begin{bmatrix}2 & 2 & -1\\23 & 4 & 4\\10 & 1 & 2\end{bmatrix},\ A_2=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\3 & 23 & 4\\2 & 10 & 2\end{bmatrix},\ A_3=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\3 & 4 & 23\\2 & 1 & 10\end{bmatrix}.$$

serta determinan $det(A_1) = 13$, $det(A_2) = 26$, dan $det(A_3) = 39$. Oleh karena itu, diperolehlah:

$$x_1=\frac{det(A_1)}{det(A)}=\frac{13}{13}=1,\quad x_2=\frac{det(A_2)}{det(A)}=\frac{26}{13}=2,\quad x_3=\frac{det(A_3)}{det(A)}=\frac{39}{13}=3 \quad \square$$

LATIHAN 3.3

1. Tentukan *rank* dari matriks-matriks berikut dengan menggunakan determinan submatriksnya.

(a) $\begin{bmatrix}3 & 2 & 4\\1 & 3 & 2\\2 & 6 & 4\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}2 & 4 & -2 & -4\\3 & 7 & 0 & -5\\-1 & -3 & -2 & 1\\-4 & -10 & -2 & 6\end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix}1 & -2 & -3 & 0\\2 & 3 & 8 & 7\\-1 & 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}1 & 4 & -2 & -1\\-3 & 2 & -5 & 6\\2 & 4 & 7 & -3\\-5 & 2 & 1 & -10\\3 & 1 & -4 & 2\end{bmatrix}$

2. Dengan menggunakan operasi baris elementer, tentukanlah *rank* dari matriks-matriks pada soal nomor 1.
3. Jika diketahui matriks $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & -1\\-2 & 5 & 4\\3 & -7 & -5\end{bmatrix}$, maka perlihatkanlah bahwa $rank(A) = rank(A^T)$.
4. Perlihatkan bahwa *rank* dari suatu matriks A yang berukuran $n \times n$ adalah n jika dan hanya jika matriks A tak singular.
5. Misalkan matriks A dan B adalah matriks tak singular. Jika $rank(A) = m$ dan $rank(B) = n$, maka buktikan bahwa:
   (a) $rank(A + B) \leqslant m + n$
   (b) $rank(AB) \leqslant m.n$
   (c) $rank(AB) = min(m,n)$, di mana min singkatan dari minimum.
6. Diketahui matriks $A = [a_{ij}]$ berukuran 10 x 10. Tentukanlah *rank* dari matriks A jika:
   (a) $a_{ij}=\begin{cases}1, \text{ untuk } i+j=10\\0, \text{ untuk } i+j\neq 10\end{cases}.$
   (b) $a_{ij}=\begin{cases}(-1)^{i+j} & \text{jika } i\neq j\\2 & \text{jika } i=j\end{cases}$
   (c) $a_{ij} = i + j$
   (d) $a_{ij} = min(i,j)$
   (e) $a_{ij} = max(i,j)$, di mana *max* singkatan dari maksimum

Untuk soal nomor 7-12, carilah solusinya dengan aturan Cramer.

7. $\begin{cases}-2x+3y=5\\3x-4y=-6\end{cases}$
8. $\begin{cases}2x_1-x_2=5\\4x_1-2x_2=7\end{cases}$
9. $\begin{cases}2x_1+3x_2-2x_3=6\\-x_1-2x_2+x_3=-4\\3x_1-x_2+3x_3=-8\end{cases}$
10. $\begin{cases}2\alpha-3\beta+\gamma=5\\-2\alpha+2\beta-3\gamma=-7\\\alpha+\beta+\gamma=3\end{cases}$

11. $\begin{cases} a+b-2c+\quad d=4 \\ -2a-3b \quad -2d=-6 \\ 3a-2b+3c-4d=-14 \\ -a+3b-3c+2d=12 \end{cases}$

12. $\begin{cases} p+2q+4r-4s=4 \\ 5p-3q+2r-5s=7 \\ -2p+q-r+3s=-3 \\ 3p-q-3r+s=5 \end{cases}$

3.4 DETERMINAN DENGAN MATLAB

Pada bagian ini akan kita bahas mengenai determinan, *rank,* dan aturan Cramer untuk menyelesaikan sistem persamaan linier. Masing-masing dijelaskan sebagai berikut.

3.4.1 Determinan

Dari Definisi 3.1 telah kita ketahui bahwa determinan dari suatu matriks persegi A dinyatakan dengan *det(A)*. Pada Matlab, perintah untuk mencari determinan dari suatu matriks persegi A adalah " *det(A)* ". Perhatikan contoh berikut.

Contoh 3.20. Carilah determinan dari matriks:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Pertama sekali inputlah matriks pada *command window*, lalu gunakan perintah " *det(A)* ".

```
>> A=[3 4 2 ; -1 2 -4 ; 1 2 3 ];
>> det(A)
ans =
     30
```

Jadi, *det(A)* = 30. □

Pada Contoh 3.20, matriksnya berupa matriks tak singular. Untuk matriks singular, cara yang sama dapat kita terapkan.

Contoh 3.21 Carilah determinan dari matriks:

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Dengan cara seperti pada Contoh 3.20, diperoleh:

```
>> B=[1 2 3 ; 4 5 6 ; 7 8 9];
>> det(B)
ans =
     0
```

Jadi, *det(B)* = 0 dan *B* merupakan matriks singular. □

Pada Matlab, kita dapat melihat formula determinan matriks. Misalkan untuk matriks berukuran 2 x 2 yakni $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, formula determinannya dapat kita lihat dengan perintah:

```
>> syms a b c d;
>> det([a b; c d])
ans =
a*d-b*c
```

Untuk matriks berukuran 3 x 3 yakni $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, perintah untuk melihat formulanya adalah:

```
>> syms a b c d e f g h i;
>> det([a b c; d e f; g h i])
ans =
i*a*e-a*f*h-i*d*b+d*c*h+g*b*f-g*c*e
```

Perintah "*syms*" merupakan perintah untuk mendefinisikan simbol-simbol yang akan digunakan. Berikut ini contoh penggunaannya.

Contoh 3.22 Dari matriks pada Contoh 3.20, yaitu:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Pertama sekali definisikan simbolnya. Kemudian cari determinannya:

```
>> syms a b c d e f g h i;
>> det([3 4 2; -1 2 -4; 1 2 3])
ans =
   30
```

Kita juga dapat menggunakan perintah berikut:

```
>> A=sym([3 4 2; -1 2 -4; 1 2 3]);
>> det(A)
ans =
30
```

Seandainya kita menghendaki nilai determinan dari suatu matriks yang entrinya bilangan pecahan juga berupa bilangan pecahan, cara pada Contoh 3.22 dapat kita gunakan. Perhatikan contoh berikut.

Contoh. 3.23 Carilah determinan dari matriks:

$$A=\begin{bmatrix} 1/3 & 1 & 2/5 \\ 2/5 & -1 & 4 \\ 1 & 2/3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan cara seperti Contoh 3.22, yakni:

```
>> A=sym([1/3 1 2/5 ; 2/5 -1 4 ; 1 2/3 2]);
```

```
>> det(A)
ans =
484/225
```

Jadi, *det(A)* = 484/225.

Jika kita menggunakan cara seperti Contoh 3.20, maka diperoleh:

```
>> A=[1/3 1 2/5 ; 2/5 -1 4 ; 1 2/3 2];
>> det(A)
ans =
    2.1511
```

Determinan dari matriks berupa bilangan desimal. □

3.4.2 Rank Matriks

Pada bagian 3.3.1 telah kita pelajari tentang *rank* suatu matriks. Dari Definisi 3.10, telah kita ketahui bahwa *rank* dari suatu matriks A dinyatakan dengan *rank*(A). Pada Matlab, perintah yang dilakukan untuk menentukan *rank* matriks A adalah " *rank*(A) ". Agar pembaca dapat memahami, perhatikan contoh berikut.

Contoh 3.24. Dari matriks pada Contoh 3.14, yaitu:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 6\\ -2 & -1 & -3\\ 3 & -2 & -6\end{bmatrix}$$

akan dicari *rank*-nya dengan menggunakan Matlab. Perintah yang kita lakukan adalah:

```
>> A=[1 2 6 ; -2 -1 -3 ; 3 -2 -6];
>> rank(A)
ans =
    2
```

□

Catatan: Untuk matriks *A* dengan ukuran lainnya, perintah " *rank*(A) " dapat digunakan.

3.4.3 Aturan Crammer

Pada bagian 3.3.2 kita ketahui bahwa untuk mencari matriks A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, dari suatu matriks koefisien *A* adalah menggantikan kolom ke-*i* dari matriks *A* dengan matriks konstan *B*. Agar pembaca dapat memahami aplikasi aturan Crammer ke dalam Matlab, perhatikanlah contoh berikut.

Contoh 3.25 Dari sistem persamaan linier pada Contoh 3.19 (b), yaitu:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2\\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 23.\\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 10\end{cases}$$

Di mana matriks koefisien *A* dan matriks konstan *B* masing-masing adalah:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 4 & 4\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix} \text{ dan } B=\begin{bmatrix}2\\ 23\\ 10\end{bmatrix}.$$

Untuk mencari matriks A_1, A_2, dan A_3 dengan menggunakan Matlab adalah:

```
>> A=[1 2 -1 ; 3 4 4 ; 2 1 2];     %input matriks koefisien A
>> B=[2 ; 23 ; 10];          %input matriks konstan B
>> A1=A;          %definisikan A1
>> A2=A;          %definisikan A2
>> A3=A;          %definisikan A3
>> A1(:,1)=B          %membentuk A1
A1 =
   2     2    -1
  23     4     4
  10     1     2
>> A2(:,2)=B          %membentuk A2
A2 =
   1     2    -1
   3    23     4
   2    10     2
>> A3(:,3)=B          %membentuk A3
A3 =
   1     2     2
   3     4    23
   2     1    10
```

Selanjutnya untuk mencari solusi x_1, x_2 dan x_3 adalah:

```
>> x1=det(A1)/det(A)          %mencari nilai x1
x1 =
   1
>> x2=det(A2)/det(A)          %mencari nilai x2
x2 =
   2
>> x3=det(A3)/det(A)          %mencari nilai x3
x3 =
   3
```

□

LATIHAN 3.3

1. Diketahui $A=\begin{bmatrix}9 & 8 & 7\\ 6 & 5 & 4\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$ dan $B=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 3\\ 3 & 8 & -10\\ 5 & -7 & -12\end{bmatrix}$. Dengan menggunakan Matlab, tentukanlah:
   (a) *det(A)* dan *det*(B)
   (b) *rank*(A) dan *rank*(B)
   (c) *rank*($A + B$)
   (d) *rank*(AB)

2. Buatlah matriks koefisien A dan matriks konstan B dengan menggunakan Matlab dari sistem persamaan linier berikut.

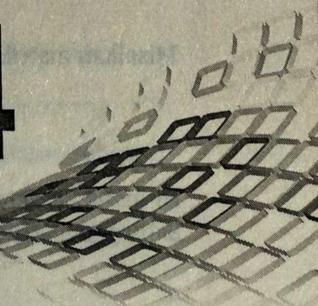
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= -1 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= -16 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 8 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 - 4x_4 &= 5 \end{aligned}$$

Kemudian tentukanlah:

(a) *det(A)* dan *rank(A)*

(b) solusi sistem persamaan linier tersebut.

INVERS 4



Pada bagian ini, akan dijelaskan tentang *invers* matriks dengan menggunakan *adjoint*, *invers* matriks dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan, dan penyelesaian sistem persamaan linier dengan *invers*. Masing-masing dijelaskan sebagai berikut.

4.1 INVERS MATRIKS DENGAN ADJOINT

Pada bagian 3.2.2, kita telah membahas tentang kofaktor. Definisi berikut memperlihatkan keterkaitan antara kofaktor dengan *adjoint*.

Definisi 4.1 *Andaikan $A = [a_{ij}]$ adalah matriks persegi yang berukuran n x n. Misalkan C_{ij} adalah kofaktor dari entri a_{ij}. Adjoint dari matriks A, ditulis adj(A), merupakan sebuah matriks yang dihasilkan dari tanspose matriks kofaktornya. Atau dapat ditulis sebagai.*

$$adj(A) = \left[C_{ij}\right]^T. \tag{4.1}$$

Dari Definisi 4.1, matriks kofaktor-kofaktor dari matriks persegi A, dapat dituliskan sebagai:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}.$$

Dan dari bentuk (4.1) diperoleh:

$$adj(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}. \tag{4.2}$$

Misalkan matrik A berukuran 2 x 2 yaitu:

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Di mana kofaktor-kofaktornya adalah $C_{11}=d$, $C_{12}=-c$, $C_{21}=-b$, dan $C_{22}=a$. Sehingga matriks kofaktor-kofaktornya adalah:

$$\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix},$$

dan *adjoint*-nya adalah:

$$adj(A)=\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}. \tag{4.3}$$

Contoh 4.1 Carilah *adjoint* dari matriks berikut:

(a) $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $B=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

Untuk mencari *adjoint* dari (a), gunakan bentuk (4.3) sehingga:

$$adj(A)=\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Untuk mencari *adjoint* dari (b), carilah terlebih dahulu kofaktor dari masing-masing entrinya. Dengan menggunakan cara seperti pada Contoh 3.10 diperoleh $C_{11}=-11$, $C_{12}=9$, $C_{13}=4$, $C_{21}=-22$, $C_{22}=24$, $C_{23}=7$, $C_{31}=11$, $C_{32}=-14$, dan $C_{33}=-5$. Sehingga matriks yang dibentuk kofaktor-kofaktornya adalah:

$$\begin{bmatrix} -11 & 9 & 4 \\ -22 & 24 & 7 \\ 11 & -14 & -5 \end{bmatrix}$$

Oleh karena itu, *adjoint*-nya adalah:

$$adj(B)=\begin{bmatrix} -11 & -22 & 11 \\ 9 & 24 & -14 \\ 4 & 7 & -5 \end{bmatrix}.$$

□

Dari Definisi 4.1, dapat diperoleh beberapa sifat dari *adjoint* seperti yang temuat dalam teorema berikut.

Teorema 4.2 *Jika A adalah matriks persegi, I adalah matriks identitas, dan k adalah suatu skalar real. Maka:*

(i) $adj(A^T)=(adj(A))^T$

(ii) $adj(I)=I$

(iii) $adj(k.A)=k^{n-1}\,adj(A)$

Bukti. (i) Misalkan matriks A berukuran n x n dan dapat dituliskan sebagai:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Dan dari bentuk (4.2), matriks kofaktor dan *adjoint*-nya adalah:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \text{ dan } adj(A)=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya, transpose dari matriks A adalah:

$$A^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Misalkan entri a_{ij}^T merupakan entri-entri dari A^T dan M_{ij}^T merupakan minor dari entri a_{ij}^T. Lihatlah bahwa matriks minor M_{ij}^T merupakan transpose dari matriks minor M_{ij} dari entri a_{ij}. Berdasarkan Teorema 3.4, diperoleh:

$$|M_{ij}|=|M_{ij}^T|$$

Sehingga matriks kofaktor C_{ij} dari matriks A^T adalah:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Oleh karena itu, *adjoint* dari matriks A^T adalah:

$$adj(A^T)=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}=(adj(A))^T$$

(ii) Pertama sekali akan kita perlihatkan bahwa $det(I)=1$. Dari bentuk (3.2), hasil kali elementernya adalah 1 jika permutasinya adalah:

$\in_{1,2,3,\ldots,n}$

Dan, untuk permutasi lainnya akan bernilai nol. Sehingga dengan meng-gunakan bentuk (3.5) diperoleh bahwa:

$$det(I) = 1. \qquad (4.4)$$

Selanjutnya akan kita perlihatkan bahwa $adj(I) = I$. Misalkan I adalah matriks identitas yang berukuran $n \times n$. Matriks minor M_{ij} dari entri pada diagonal utamanya adalah sebuah matriks identitas yang berukuran $(n-1) \times (n-1)$ sehingga $|M_{ii}| = 1$ dan kofaktor $C_{ii} = 1$. Adapun matriks minor M_{ij} dengan $i \neq j$ memiliki sebaris angka nol, sehingga menurut Teorema 3.6, determinannya sama dengan nol dan $C_{ij} = 0,\ i \neq j$. Oleh karena itu, dari Definisi 4.1 diperoleh:

$$adj(I) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I$$

(iii) buktinya diserahkan kepada pembaca. Gunakan Teorema 3.5 (i) dan Definisi 4.1. ■

Untuk memahami Teorema 4.2, pembaca dapat memahami contoh berikut.

Contoh 4.2 Misalkan diketahui matriks:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tentukanlah:

(a) $adj(A)$

(b) $adj(A^T)$

(c) $adj(3A)$

Untuk menjawab (a), gunakan cara seperti Contoh 1 sehingga diperoleh:

$$adj(A) = \begin{bmatrix} 3 & 11 & -10 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -7 & 5 \end{bmatrix}.$$

Untuk menjawab (b) ada dua cara. Cara *pertama*, carilah transpose dari matriks A, kemudian gunakan cara seperti Contoh 4.1. Matriks A^T dan $adj(A^T)$ masing-masing adalah:

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix} \text{ dan } adj(A^T) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 11 & 2 & -7 \\ -10 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Cara *kedua*, gunakan Teorema 4.2(i) dan hasil (a) sehingga diperoleh:

$$adj(A^T) = (adj(A))^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 11 & 2 & -7 \\ -10 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Untuk menjawab (c) ada dua cara. Cara *pertama*, carilah matriks 3A, kemudian gunakan cara seperti Contoh 4.1, sehingga:

$$adj(3A) \begin{bmatrix} 27 & 99 & 90 \\ 9 & 18 & 0 \\ -9 & -63 & 45 \end{bmatrix}.$$

Cara *kedua*, gunakan Teorema 4.2(iii) dan hasil (a) sehingga diperoleh:

$$adj(3A) = 3^2.adj(A) = 9\begin{bmatrix} 3 & 11 & -10 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 99 & -90 \\ 9 & 18 & 0 \\ -9 & -63 & 45 \end{bmatrix}.$$ □

Teorema berikut ini merupakan alasan utama yang membuat menariknya *adjoint* dari sebuah matriks.

Teorema 4.3. *Untuk sebuah matriks persegi A yang berukuran n x n.*

$$A.adj(A) = det(A).I \qquad (4.5)$$

Bukti. Misalkan perkalian $A.adj(A)$ dapat dituliskan sebagai:

$$A.adj(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Entri dari baris ke-i dan kolom ke-j dari perkalian A adalah:

$$a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + a_{i3}C_{j3} + \cdots + a_{in}C_{jn} \qquad (4.6)$$

Jika $i = j$, maka bentuk (4.6) merupakan determinan dari matriks A yang melibatkan kofaktor (lihat bagian 3.2.2). Dalam hal lain, jika $i \neq j$, maka bentuk (4.6) bernilai nol. Oleh karena itu,

$$A.adj(A) = \begin{bmatrix} det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & det(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & det(A) \end{bmatrix} = det(A).I$$ ■

Dari bentuk terakhir dari Teorema 4.3, kita dapat menuliskan bahwa:

$$A.adj(A) = diag(|A|,|A|,\ldots,|A|) = |A|.I. \tag{4.7}$$

Berikut ini merupakan akibat dari Teorema 4.3.

Akibat 4.4. Jika A adalah matriks persegi yang berukuran $n \times n$, maka:

$$|A.adj(A)| = |A|^n \tag{4.8}$$

Bukti. Dari bentuk (4.7) yaitu:

$$A.adj(A) = diag(|A|,|A|,\ldots,|A|).$$

Dengan menggunakan Teorema 3.7, diperoleh

$$\begin{aligned}|A.adj(A)| &= |diag(|A|,|A|,\ldots,|A|)| \\ &= |A|.|A|\ldots|A| \\ &= |A|^n\end{aligned}$$ ■

Jika a adalah bilangan skalar tak nol, maka akan terdapat bilangan skalar $\frac{1}{a}$ sedemikian sehingga:

$$a.\frac{1}{a} = 1.$$

Bilangan skalar $\frac{1}{a}$ inamakan sebagai *invers* dari a dan dinyatakan dengan a^{-1}. Tidak hanya bilangan skalar saja yang memiliki *invers*, matriks juga memiliki *invers*. Berikut ini diberikan definisi *invers* suatu matriks.

Definisi 4.5 *Misalkan A adalah matriks invertibel. Invers dari matriks A dinyatakan sebagai A^{-1}, yang merupakan sebuah matriks persegi sedemikian sehingga: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.*

Definisi 4.5 merupakan modifikasi dari Definisi 1.16. Sebuah matriks A yang invertibel berarti matriks tersebut adalah tak singular ($det(A) \neq 0$). Dalam Teorema berikut terdapat hubungan antara *adjoint* dan *invers* suatu matriks persegi.

Teorema 4.6 *Misalkan A adalah matriks tak singular yang berukuran n x n, maka:*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

Bukti. Dengan menggunakan Teorema 4.3 yaitu:

$$A.adj(A) = det(A).I$$

Kalikan *kedua* ruas dengan A^{-1}. Oleh Definisi 4.5, diperoleh

$$\begin{aligned}A^{-1}A.adj(A) &= A^{-1}\det(A).I \\ I.adj(A) &= \det(A).A^{-1} \\ adj(A) &= \det(A).A^{-1}\end{aligned}$$

Karena A tak singular, maka $det(A) \neq 0$. Bagikan kedua ruas dengan $det(A)$, sehingga diperoleh:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$ ■

Agar pembaca dapat memahami tentang *invers* suatu matriks dengan menggunakan *adjoint*, perhatikanlah contoh berikut ini.

Contoh 4.3. Dari matriks pada Contoh 4.2, yaitu:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

dan $det(A) = 5$. Dari Contoh 4.2, telah diperoleh bahwa:

$$adj(A) = \begin{bmatrix} 3 & 11 & -10 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -7 & 5 \end{bmatrix}.$$

Sehingga dengan menggunakan Teorema 4.6, *invers* dari matriks A adalah:

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 11 & -10 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{11}{5} & -2 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & -\frac{7}{5} & 1 \end{bmatrix}.$$ □

Teorema 4.7 *Jika A adalah invertibel, maka A^{-1} juga invertibel dan $(A^{-1})^{-1} = A$.*

Bukti diserahkan kepada pembaca sebagai latihan. Gunakanlah Definisi 4.5.

Hubungan antara matriks invertibel dan matriks tak singular termuat dalam teorema berikut ini.

Teorema 4.8 *Sebuah matriks persegi dikatakan invertibel jika dan hanya jika matriks tersebut tak singular.*

Bukti. ($\Rightarrow$) misalkan matriks A adalah tak singular, dengan menggunakan bentuk normal matriks, terdapat matriks tak singular P dan Q sedemikian sehingga:

$$PAQ = I$$

Dengan mengalikan kedua ruas dengan P^{-1}, kemudian kalikan juga kedua ruas dengan Q^{-1}, diperoleh:

$$A = P^{-1}Q^{-1}$$

Dengan menggunakan Teorema 1.17(ii) dan Teorema 4.7, diperoleh:

$$A^{-1} = \left(P^{-1}Q^{-1}\right)^{-1} = QP$$

Oleh karena itu, A adalah invertibel.

($\Leftarrow$) Misalkan A adalah invertibel. Menurut Definisi 4.5, matriks A mempunyai *invers* yaitu A^{-1}. Dengan Teorema 4.6, *invers* dari matriks A adalah:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}adj(A)$$

Invers dari matriks A akan ada jika $det(A) \neq 0$. Sehingga A adalah tak singular. ■

LATIHAN 4.1

1. Carilah *adjoint* dari masing-masing matriks berikut.

(a) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ -2 & -5 & 2 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 7 & -3 & -4 & 8 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -6 & 4 \\ 4 & 5 & 7 & -9 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ -6 & 8 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 7 & 6 & 7 & 5 & 4 \\ 1 & 8 & 1 & 2 & 8 \\ 4 & -6 & 4 & 1 & -3 \\ 8 & 7 & -2 & 8 & 2 \\ 9 & -1 & -5 & -9 & -6 \end{bmatrix}$

2. Manakah dari matriks berikut yang mempunyai *invers*? Jika mempunyai *invers*, tentukan inversnya.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -3 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & 4 \\ -1 & 5 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \\ -2 & 19 & 10 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \\ -5 & 3 & -4 & -3 \end{bmatrix}$

3. Misalkan $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \end{bmatrix}$. Perlihatkan bahwa:

   (a) $adj\left(A^T\right) = \left(adj(A)\right)^T$ (b) $A.adj(A) = \det(A).I$

4. Misalkan diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$. Perlihatkan bahwa $(A^{-1})^{-1} = A$.

5. Diberikan matriks $= \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, tunjukkan bahwa $|A.adj(A)| = |A^n|$.

6. Buktikan Teorema 4.2(iii).

7. Jika A adalah matriks persegi yang berukuran n x n dan tak singular, maka buktikanlah bahwa:

$$|adj(A)| = |A|^{n-1}$$

8. Misalkan A dan B adalah matriks persegi yang berukuran n x n. Buktikan bahwa:

$$adj(AB) = adj(B).adj(A)$$

9. Diketahui A adalah sebuah matriks simetris. Perlihatkanlah bahwa *adj(A)* juga merupakan matriks simetris.

10. Buktikan bahwa jika $|A| \neq 0$, maka:

    (a) $adj(adj(A)) = |A|^{n-2}.A$

    (b) $adj(adj(A)) = |A|^{n-2}.A$

11. Buktikan bahwa *adjoint* dari suatu matriks segitiga adalah matriks segitiga.

12. Carilah matriks invertibel A dan B sedemikian sehingga $A - B$ tidak invertibel.

13. Carilah matriks singular A dan B sedemikian sehingga $A - B$ adalah invertibel.

14. Buktikan bahwa *invers* matriks diagonal $diag(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ adalah:

$$diag\left(\frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_2}, \ldots, \frac{1}{k_n}\right)$$

untuk sembarang skalar k_i, $i = 1, 2, ..., n$.

15. Jika A adalah invertibel dan $AB = AC$, maka buktikanlah bahwa $B = C$.
16. Misalkan A, B, dan C berukuran $n \times n$. Jika A adalah invertibel dan $AB = C$, maka perlihatkanlah bahwa $B = A^{-1} C$.
17. Jika A adalah invertibel, maka $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.
18. Jika B adalah *invers* dari A^2, perlihatkan bahwa AB merupakan *invers* dari A.

4.2 INVERS MATRIKS DENGAN ELIMINASI GAUSS-JORDAN

Pada bagian ini akan diawali dengan matriks elementer. Berikut ini merupakan definisi dari matriks elementer.

Definisi 4.9 *Sebuah matriks persegi berukuran n x n dikatakan sebagai matriks elementer jika matriks tersebut diperoleh dari matriks identitas yang berukuran n x n atau I_n dengan melakukan operasi baris elementer tunggal.*

Dari Definisi 4.9, terdapat istilah operasi baris elementer tunggal. Maksud dari operasi baris elementer tunggal adalah:

1. Menukarkan baris ke-*i* dari I_n dengan baris ke-*j*.
2. Mengalikan baris ke-*i* dari I_n dengan bilangan skalar *k*.
3. Menambahkan *k* kali baris ke-*i* dari I_n dengan baris ke-*j*.

Agar pembaca dapat memahami tentang matriks elementer, perhatikan contoh berikut ini.

Contoh 4.4 Matriks-matriks berikut ini merupakan matriks elementer.

$$\text{(a)}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix},\ \text{(b)}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ \text{(c)}\begin{bmatrix}1&0&0\\-4&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ \text{(d)}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Pada (a), matriksnya dihasilkan dengan menukarkan baris kedua dengan baris ketiga dari I_3. Matriks (b) dihasilkan dengan mengalikan baris kedua dari I_3 dengan −2. Matriks (c) dihasilkan dengan menambahkan −4 kali baris pertama I_3 dengan baris kedua. Matriks (d) dihasilkan dengan mengalikan baris pertama dari I_3 dengan 1. □

Catatan: matriks identitas I_n juga merupakan sebuah matriks elementer dari I_n.

Invers dari matriks elementer dengan operasi baris elementer tunggal harus memenuhi aturan berikut ini, yaitu:

1. Menukarkan baris ke-*i* dari I_n dengan baris ke-*j*.
2. Mengalikan baris ke-*i* dari I_n dengan bilangan skalar $1/k$.

3. Menambahkan −*k* kali baris ke-*i* dari I_n dengan baris ke-*j*.

Agar pembaca dapat memahami tentang *invers* dari suatu matriks elementer, perhatikan contoh berikut ini.

Contoh 4.5 Dari matriks elementer pada Contoh 4.4, inversnya adalah:

$$\text{(a)}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix},\ \text{(b)}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ \text{(c)}\begin{bmatrix}1&0&0\\4&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ \text{(d)}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Pada (a), dengan menggunakan aturan 1 yaitu menukarkan baris kedua dari I_3 dengan baris ketiga. Dari Definisi 4.5, diperoleh:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=I_3.$$

Pada (b), dengan menggunakan aturan 2 yaitu mengalikan baris kedua dari I_3 dengan −(1/2). Dari Definisi 4.5, diperoleh:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{bmatrix}=I_3.$$

Pada (c), dengan menggunakan aturan 3 yaitu menambahkan 4 kali baris pertama dari I_3 dengan baris kedua. Dari Definisi 4.5, diperoleh:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\-4&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\4&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\4&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-4&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=I_3.$$

Pada (d), gunakan aturan 2. Dari Definisi 4.5, diperoleh:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=I_3.I_3=I_3.$$

Bila A adalah sebuah matriks persegi, *invers* dari matriks A atau A^{-1} dapat dicari dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan, yaitu dengan terlebih dahulu membuat sebuah matriks gandengan:

$$[A \quad I]$$

Kemudian, lakukan eliminasi Gauss-Jordan sehingga diperoleh bentuk eselon baris tereduksi, yaitu:

$$[I \quad A^{-1}]$$

Yang terdiri dari matriks identitas di bagian kiri dan *invers* di bagian kanannya. Untuk lebih jelasnya, perhatikanlah contoh berikut.

Contoh 4.6 Carilah *invers* dari matriks:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 3 & 4\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix}.$$

Untuk mencari A^{-1}, buat matriks gandengannya yaitu:

$$\begin{bmatrix}A & I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 1 & 0\\ 2 & 4 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Kemudian lakukan operasi baris elementer sehingga diperoleh bentuk eselon baris tereduksi.

$$\left|\begin{array}{cccc}1 & 3 & 1 & 0\\ 2 & 4 & 0 & 1\end{array}\right| \quad \underset{\sim}{R_2 \leftarrow -2R_1+R_2} \quad \left|\begin{array}{cccc}1 & 3 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -2 & 1\end{array}\right|$$

$$\underset{\sim}{R_2 \leftarrow -\tfrac{1}{2}R_2} \quad \left|\begin{array}{cccc}1 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -\tfrac{1}{2}\end{array}\right|$$

$$\underset{\sim}{R_1 \leftarrow -3R_2+R_1} \quad \left|\begin{array}{cccc}1 & 0 & -2 & \tfrac{3}{2}\\ 0 & 1 & 1 & -\tfrac{1}{2}\end{array}\right|.$$

Jadi, $A^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & \tfrac{3}{2}\\ 1 & -\tfrac{1}{2}\end{bmatrix}$

Untuk mencari B^{-1}, lakukan cara seperti mencari A^{-1} dengan matriks gandengannya yaitu:

$$\begin{bmatrix}B & I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Kemudian lakukan operasi baris elementer, sehingga diperoleh:

$$\left|\begin{array}{cccccc}1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right| \quad \underset{\sim}{R_2 \leftarrow -2R_1+R_2} \quad \left|\begin{array}{cccccc}1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right|$$

$$\underset{\sim}{R_2 \leftarrow \tfrac{1}{5}R_2} \quad \left|\begin{array}{cccccc}1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\tfrac{2}{5} & \tfrac{1}{5} & 0\\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right|$$

$$\underset{\sim}{R_3 \leftarrow 2R_2+R_3} \quad \left|\begin{array}{cccccc}1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\tfrac{2}{5} & \tfrac{1}{5} & 0\\ 0 & 0 & 1 & -\tfrac{4}{5} & \tfrac{2}{5} & 1\end{array}\right|$$

$$\underset{\sim}{R_1 \leftarrow -2R_3+R_1} \quad \left|\begin{array}{cccccc}1 & -1 & 0 & \tfrac{13}{5} & -\tfrac{4}{5} & -2\\ 0 & 1 & 0 & -\tfrac{2}{5} & \tfrac{1}{5} & 0\\ 0 & 0 & 1 & -\tfrac{4}{5} & \tfrac{2}{5} & 1\end{array}\right|$$

$$\underset{\sim}{R_1 \leftarrow R_2+R_1} \quad \left|\begin{array}{cccccc}1 & 0 & 0 & \tfrac{11}{5} & -\tfrac{3}{5} & -2\\ 0 & 1 & 0 & -\tfrac{2}{5} & \tfrac{1}{5} & 0\\ 0 & 0 & 1 & -\tfrac{4}{5} & \tfrac{2}{5} & 1\end{array}\right|.$$

Jadi, $B^{-1}=\begin{bmatrix}\tfrac{11}{5} & -\tfrac{3}{5} & -2\\ -\tfrac{2}{5} & \tfrac{1}{5} & 0\\ -\tfrac{4}{5} & \tfrac{2}{5} & 1\end{bmatrix}.$ □

LATIHAN 4.2

1. Manakah dari mariks di bawah ini yang merupakan matriks elementer?

   (a) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix}-\sqrt{5} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

   (c) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -4 & 0 & 1\end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \pi\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

2. Carilah *invers* dari matriks-matriks elementer berikut ini.

   (a) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -5 & 1\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -5 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

3. Diketahui dua buah matriks:

   $$A=\begin{bmatrix}1 & 5 & 2\\ -1 & 4 & 1\\ 3 & 2 & -1\end{bmatrix} \text{ dan } B=\begin{bmatrix}3 & 2 & -1\\ -1 & 4 & 1\\ 1 & 5 & 2\end{bmatrix}$$

   Carilah matriks elementer E_1 dan E_2 sehingga:

   (a) $E_1A=B$ (b) $E_2B=A$.

4. Carilah *invers* dari matriks-matriks berikut dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan.

   (a) $\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & -2\\ -2 & 4 & 1\end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & -3 \\ -3 & -1 & -7 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

5. Misalkan diketahui matriks:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin\alpha & -\cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \end{bmatrix}.$$

Perlihatkanlah bahwa matriks A invertibel, kemudian carilah A^{-1}.

6. Diketahui matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

(a) Carilah matriks elementer E_1 dan E_2 sedemikian sehingga $E_1 E_2 A = I$.
(b) Tuliskanlah A_{-1} sebagai hasil kali matriks elementernya.
(c) Bandingkanlah hasil A^{-1} yang diperoleh dari hasil kali matriks elementernya dan A^{-1} yang diperoleh dengan eliminasi Gauss-Jordan.

7. Diketahui matriks:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Carilah matriks elementer E_1, E_2, E_3, dan E_4 sehingga $E_1 E_2 A = I$ dan $AE_3 E_4 = I$.
(b) Carilah matriks elementer E_5 dan E_6 sehingga $E_5 AE_6 = I$.
(c) Apakah $E_1 = E_3 = E_6$ dan $E_2 = E_4 = E_5$?

4.3 PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINIER DENGAN INVERS

Pada Bab 2, kita telah mengetahui tentang definisi persamaan linier. Misalkan suatu sistem persamaan linier dituliskan dalam bentuk matriks seperti pada bentuk (2.3). Teorema berikut ini menjelaskan tentang solusi sistem (2.3) dengan menggunakan *invers* matriks koefisien.

Teorema 4.10 *Jika A adalah matriks invertibel yang berukuran n x n, maka untuk setiap matriks B yang berukuran n x 1, sistem persamaan linier AX = B mempunyai tepat satu penyelesaian yakni $X = A^{-1} B$.*

Bukti. Kita lakukan substitusi $X = A^{-1} B$ ke persamaan $AX = B$, diperolehlah $A(A^{-1} B) = B$. Sehingga $X = A^{-1} B$ merupakan solusinya. Selanjutnya kita perlihatkan bahwa solusinya adalah tepat satu. Anggaplah X_0 merupakan pemecahan yang lain. Karena X_0 merupakan suatu pemecahan, maka $AX_0 = B$. Kalikan kedua ruas dengan A^{-1}. Sehingga diperoleh $X = A^{-1} B$. ■

Agar pembaca dapat memahami tentang penyelesaian sistem persamaan linier dengan menggunakan *invers*, perhatikanlah contoh berikut ini.

Contoh 4.7 Dari sistem persamaan linier pada Contoh 2.8, yaitu:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

Matriks koefisien A dan matriks konstan B masing-masing adalah:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Invers dari matriks A adalah:

$$A^{-1} = \frac{1}{19}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 10 & -4 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunkan Teorema 4.10, diperoleh:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{19}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 10 & -4 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$ □

Teorema berikut ini memberikan suatu hasil dari suatu sistem persamaan linier homogen.

Teorema 4.11 *Jika A adalah matriks yang invertibel, maka sistem persamaan AX = 0 hanya mempunyai pemecahan trivial.*

Bukti. Andaikan A adalah matriks yang invertibel dan misalkan X_0 merupakan solusi dari $AX = 0$. Jadi $AX_0 = 0$. Dengan menggunakan Teorema 4.10, diperoleh bahwa $X_0 = A^{-1}.\ 0 = 0$. Jadi $AX = 0$ hanya mempunyai pemecahan trivial. ■

Teorema berikut ini memperlihatkan dua buah matriks yang berukuran $n \times n$ saling *invers*.

Teorema 4.12 *Misalkan* A *adalah matriks persegi.*
(i) *Jika B adalah matriks persegi yang memenuhi $AB = I$, maka $B = A^{-1}$ dan $A = B^{-1}$.*
(ii) *Jika B adalah matriks persegi yang memenuhi $BA = I$, maka $B = A^{-1}$ dan $A = B^{-1}$.*

Bukti diserahkan kepada pembaca sebagai latihan. Kalikan kedua ruas pada masing-masing persamaan A^{-1} atau B^{-1}.

LATIHAN 4.3

1. Tentukan solusi dari sistem-sistem persamaan linier berikut dengan cara seperti Contoh 4.7.

(a) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = -1 \\ 3x_1 - 4x_2 = 7 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{3}x_2 = 7 \\ -\frac{2}{3}x_1 + \frac{3}{2}x_2 = -22 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -4 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 15 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -14 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = -6 \\ -2x_1 + 2x_3 = 5 \\ 4x_1 - 3x_2 - 3x_3 = -1 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} -p + 2q - r + 4s = -2 \\ 2p - q + 3r - 2s = 4 \\ -2p - 3q - 2r + s = -4 \\ 3p + 2q - r - 3s = -7 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} 2a + b - 4d + e = 6 \\ 3a - 2c + 5d - 4e = -8 \\ -a + b - 3c + 2e = -3 \\ 2b - 4c + 2d + 6e = -2 \\ 4a - 5b + 3c + 3e = 9 \end{cases}$

2. Apakah sistem persamaan linier homogen berikut mempunyai penyelesaian trivial atau tidak? Berikan penjelasan dengan menggunakan Teorema 4.11.

(a) $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} -2p - 3q + 5r = 0 \\ -p - 2q + r = 0 \\ 3p + 5q - 6r = 0 \end{cases}$

3. Buktikan Teorema 4.12.
4. Misalkan A adalah matriks persegi yang berukuran $n \times n$. Perlihatkanlah bahwa sistem persamaan linier $AX = X$ dapat dituliskan juga sebagai $(A - I)X = 0$.
5. Misalkan A adalah matriks berukuran $n \times n$. Sistem persamaan $AX = 3X$ mempunyai tepat satu solusi jika dan hanya jika $A - 3I$ adalah matriks invertibel.
6. Misalkan $AX = 0$ merupakan suatu sistem persamaan linier homogen yang terdiri dari n buah persamaan dan n buah variabel. Misalkan P adalah matriks invertibel yang berukuran $n \times n$. Tunjukkan bahwa $AX = 0$ hanya mempunyai solusi trivial jika dan hanya jika $(PA)X = 0$ hanya mempunyai solusi trivial.

4.4 INVERS MATRIKS DENGAN MATLAB

Mencari *invers* suatu matriks persegi A menggunakan perintah " *inv(A)*" telah kita bahas pada Bab 1. Pada bagian ini, akan kita bahas mengenai *adjoint* matriks persegi, *invers* matriks dengan eliminasi Gauss-Jordan, dan menyelesaikan sistem persamaan linier dengan *invers*.

4.4.1 Adjoint Matriks Persegi

Dengan mengalikan kedua ruas pada hasil Teorema 4.6, kita peroleh bahwa:

$$adj(A) = det(A).A^{-1}$$

sehingga dengan menggunakan Matlab, perintah yang digunakan untuk memperoleh *adjoint* adalah "*det(A)*inv(A)*". Untuk lebih jelasnya perhatikan contoh berikut ini.

Contoh 4.8 Misalkan kita telah menginput matriks persegi sebagai berikut.

```
>> A=[3 2 1 ; -1 4 2 ; 1 5 2];
```

Kemudian kita cari adjointnya dengan perintah

```
>> adj=det(A)*inv(A)
adj =
   -2.0000    1.0000         0
    4.0000    5.0000   -7.0000
   -9.0000  -13.0000   14.0000
```

□

Catatan: Pencarian *adjoint* dengan menggunakan cara di atas hanya diperuntukkan bagi matriks persegi yang invertibel.

Bila kita ingin mencari matriks kofaktor dari matriks persegi A, kita dapat mentransposekan *adjoint* dari matriks A. Perhatikan contoh berikut.

Contoh 4.9 Matriks kofaktor dari matriks A pada Contoh 4.8 dapat kita temukan dengan menambahkan perintah:

```
>> matrik_kofaktor=adj'
matrik_kofaktor =
   -2.0000    4.0000   -9.0000
    1.0000    5.0000  -13.0000
         0   -7.0000   14.0000
```

□

Bagaimana bila matriks persegi A adalah singular? Untuk mencari *adjoint* matriks A, Roggert Stafford memberikan sebuah *source code* program untuk komputasinya. Berikut ini adalah *source code program* yang ia buat dan dipublikasikan dalam www.mathwork.com.

```
function B = adjugate(A)
% This finds the adjugate (adjoint) of square matrix A,
% and is valid even if A is singular or complex-valued.
```

```
% With u, s, and v obtained from [u,s,v] = svd(A), it
% makes use of the identity adj(A) = det(u*v')*v*adj(s)*u',
% which holds even if A and s are singular. The expression,
% diag(prod(reshape(s0(ix),n-1,n),1)), accomplishes the
% evaluation of adj(s), each of whose diagonal elements
% is the product of all but one of the diagonal elements
% of s.  This requires that A be n x n where n >= 2.
% Roger Stafford - 10/18/06

[m,n] = size(A);
if (m ~= n) | (n < 2)
 error('Matrix A should be size n x n with n >= 2.')
end
[u,s,v] = svd(A);
s0 = diag(s);
ix = toeplitz(ones(n-1,1),[1 zeros(1,n-1)]) ...
   + repmat((1:n-1)',1,n);
B = det(u*v')*v*diag(prod(reshape(s0(ix),n-1,n),1))*u';
```

Sebelum kita menjalankan *source code program* tersebut, ada beberapa langkah yang harus dilakukan, yakni:

(1) Buka program Matlab.
(2) Pilih *File-New-Script*, maka akan muncul halaman editor.
(3) Kopikan *source code program* di atas lalu *paste*-kan pada editor. Atau ketik ulang *source code program* di atas pada editor.
(4) Simpan *file* pada direktori yang kita inginkan, misalnya direktori "*work*" dengan nama "**adjoint.m**".
(5) Setelah proses penyimpanan selesai, pilihlah *Current Directory/ Current Folder*, yaitu *D:\MATLAB\work* jika kita menyimpan program Matlab di direktori D.

Contoh 4.10 Dari matriks A pada Contoh 4.8, akan kita cari *adjoint* matriksnya dengan "*adjoint.m*"

```
>> A=[3 2 1 ; -1 4 2 ; 1 5 2];
>> adjoint(A)
ans =
    -2.0000   1.0000    0.0000
     4.0000   5.0000   -7.0000
    -9.0000 -13.0000   14.0000
```

Contoh berikut untuk matriks singular A, $det(A) = 0$.

Contoh 4.11 Misalkan kita telah menginput matriks singular sebagai berikut.

```
A=[1 2 3 1; 4 5 6 2; 7 8 9 3; 2 1 3 2];
>> adjoint(A)
ans =
```



```
   -3.0000    6.0000   -3.0000   -0.0000
    6.0000  -12.0000    6.0000    0.0000
   -6.0000   12.0000   -6.0000   -0.0000
    9.0000  -18.0000    9.0000    0.0000
```
□

Source code program "*adjoint*.m" didesain oleh Roger untuk mencari *adjoint* matriks persegi. Tidak hanya mencari *adjoint* dari matriks persegi real saja, namun bisa juga untuk mencari *adjugate* dari matriks persegi kompleks. Perhatikanlah contoh berikut ini.

Contoh 4.12 Misalkan kita telah menginput matriks persegi kompleks yakni:

```
>> A=[3-i 2 i ; -i 4 2 ; 1 5i 2-i];
>> adjoint(A)
ans =
   8.0000 -14.0000i   -9.0000 + 2.0000i    4.0000 - 4.0000i
   3.0000 + 2.0000i    5.0000 - 6.0000i   -5.0000 + 2.0000i
   1.0000 - 0.0000i   -3.0000 -15.0000i   12.0000 - 2.0000i
```
□

4.4.2 Invers Matriks dengan Eliminasi Gauss-Jordan

Pada bagian 4.2 telah kita ketahui bahwa untuk mencari *invers* dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan melibatkan matriks gandengan:

$$[A \quad I].$$

Setelah dilakukan eliminasi Gauss-Jordan akan diperoleh:

$$[I \quad A^{-1}].$$

Untuk mencari *invers* matriks persegi A pertama sekali kita input matriks persegi A dan identitas I. Setelah itu misalkan matriks $B = [(A\ I)]$. Kemudian gunakan perintah "*rref(B)*"

Contoh 4.13 Misalkan kita input matriks persegi A yang invertibel dan matriks identitas yang masing-masing berukuran 4 x 4.

```
>> A=[2 1 3 4 ; -1 4 -3 2 ; -5 3 1 -2 ; 3 2 -3 4];
>> I=[1 0 0 0; 0 1 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1];
```

Kemudian buat matriks gandengannya.

```
>> B=[A I]
B =
     2   1   3   4   1   0   0   0
    -1   4  -3   2   0   1   0   0
    -5   3   1  -2   0   0   1   0
     3   2  -3   4   0   0   0   1
```

Setelah itu, lakukan eliminasi Gauss-Jordan.

```
>> rref(B)
ans =
```

```
1.0000      0       0       0   -0.8182 -4.2727  3.0000  4.4545
     0  1.0000      0       0   -0.7273 -3.9091  3.0000  4.1818
     0      0   1.0000      0   -0.0909 -1.3636  1.0000  1.2727
     0      0       0   1.0000   0.9091  4.1364 -3.0000 -4.2273
```

Invers dari matriks A adalah:

```
-0.8182   -4.2727    3.0000    4.4545
-0.7273   -3.9091    3.0000    4.1818
-0.0909   -1.3636    1.0000    1.2727
 0.9091    4.1364   -3.0000   -4.2273
```

Bila matriks persegi A yang kita input adalah matriks tak singular, maka setelah eliminasi Gauss-Jordan akan terdapat sebaris atau lebih yang entri-entrinya adalah nol pada matriks identitasnya. Perhatikan contoh berikut.

Contoh 4.14 Misalkan kita input matriks persegi A dan matriks identitas sebagai berikut:

```
>> A=[1 2 3; 4 5 6; 7 8 9];
>> I=[1 0 0; 0 1 0; 0 01];
```

Kemudian

```
>> B=[A I];
>> rref(B)
ans =
    1.0000       0   -1.0000      0   -2.6667   1.6667
        0   1.0000    2.0000      0    2.3333  -1.3333
        0       0        0   1.0000   -2.0000   1.0000
```

Dapat kita lihat bahwa matriks identitasnya mengandung sebaris angka nol.

□

4.4.3 Menyelesaikan Sistem Persamaan Linier dengan Invers

Dengan menggunakan hasil pada Teorema 4.10, yaitu jika sistem persamaan linier dapat dituliskan sebagai perkalian $AX = B$, maka $X = A^{-1} B$. Penyelesaian $X = A^{-1}$ B dapat dituliskan dalam Matlab dengan perintah " *x = inv(A)*B* ". Agar pembaca dapat memahaminya, perhatikan contoh berikut ini.

Contoh 4.15. Dari sistem persamaan linier pada Contoh 2.8, yaitu:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

Kita input matriks koefisien A dan matriks konstan B yakni:

```
>> A=[2 1 -2 ; 1 1 1 ; 3 -2 2];
>> B=[-2 ; 6 ; 5];
```


Setelah itu kita cari penyelesaian sistem persamaan linier tersebut dengan perintah:

```
>> X=inv(A)*B
X =
    1.0000
    2.0000
    3.0000
```

LATIHAN 4.4

1. Diketahui sebuah matriks persegi sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & c & 2 & a \\ 1 & a & -2 & 1 & b \\ 2 & -5 & 6 & b & c \\ -b & 10 & 7 & -c & 6 \\ 5 & -8 & -a & -7 & 4 \end{bmatrix}$$

   Dalam hal ini, a dan b berturut-turut merupakan tanggal dan bulan kelahiran Anda. Adapun c merupakan dua digit terakhir dari tahun kelahiran Anda. Misalkan anda lahir pada tanggal 13-11-2002, maka nilai $a = 13$, $b = 11$, dan $c = 2$. Inputlah matriks A pada *command window*, kemudian:

   a. Tentukan *adj(A)*.
   b. Hitunglah *det(A)*.
   c. Carilah A^{-1} dengan eliminasi Gauss-Jordan, kemudian bandingkan hasilnya dengan Teorema 4.6.

2. Buatlah tiga buah sistem persamaan linier tak homogen yang terdiri dari tujuh buah persamaan dan tujuh variabel, kemudian carilah solusinya dengan menggunakan *invers*.
3. Buatlah sebuah sistem persamaan linier homogen yang terdiri dari enam buah persamaan dan enam buah variabel, kemudian tentukan apakah solusinya berupa solusi trivial atau tak trivial. Bila tak trivial, tuliskanlah solusi tak trivialnya.

RUANG VEKTOR 5

Pada bab ini akan kita bahas mengenai vektor di ruang-2 atau R^2 dan ruang-3 atau R^3, ruang vektor umum, bebas linier, basis dan dimensi. Masing-masing pokok pembicaraan diuraikan sebagai berikut.

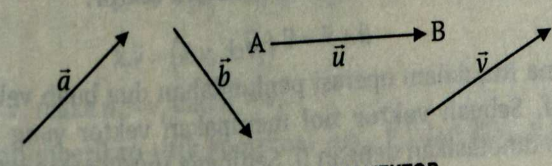
5.1 VEKTOR DI R^2 DAN R^3

5.1.1 Vektor

Sebelum kita membahas vektor secara mendalam, terlebih dahulu kita perlu mengetahui apa itu vektor dan bagaimana vektor dalam kehidupan sehari-hari. Misalkan kita memindahkan sebuah meja dengan melakukan sebuah dorongan. Pada saat kita memindahkannya, kita perlu memperhatikan dua hal, yaitu: (1) besar atau kuatnya tenaga kita mendorong meja tersebut; dan (2) arah dari tenaga yang kita berikan. Arah dari tenaga kita pada saat mendorong meja tersebut akan sangat memengaruhi jauh atau dekatnya perpindahan meja tersebut. Dalam hal ini, tenaga yang kita keluarkan mempunyai besaran dan arah. Besaran dan arah merupakan objek dari vektor.

Definisi 5.1 *Vektor secara sederhana dapat diartikan sebagai kuantitas yang mempunyai besaran dan arah.*

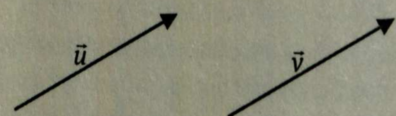
Secara geometris, vektor berupa segmen garis berarah atau berupa anak panah di R^2 dan R^3. Sebuah vektor biasanya disimbolkan dengan huruf kecil di mana di atasnya diberi tanda panah seperti $\vec{a},\vec{b},\vec{u},\vec{v}$, dan sebagainya. Gambar berikut ini melukiskan berbagai vektor.



GAMBAR 5.1 BERBAGAI VEKTOR

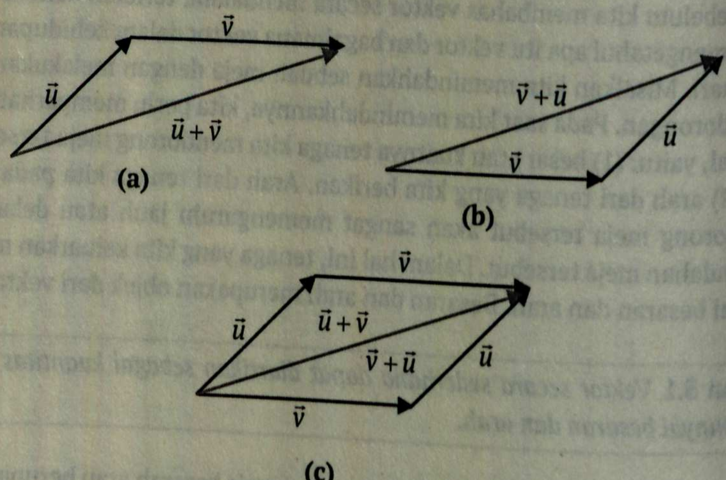
Pada Gambar 5.1, terdapat sebuah vektor $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, yakni vektor yang dimulai dari titik A (asal atau inisial) dan diakhiri dengan titik B (akhir atau terminal). Arah panah yang dilukiskan pada Gambar 5.1 menyatakan arah vektor sedangkan panjang dari panah menyatakan besar vektor.

Definisi 5.2 *Dua buah vektor $\vec{u}$ – $\vec{v}$ dikatakan sama apabila memiliki besar (panjang) dan arah yang sama dan ditulis dengan $\vec{u} = \vec{v}$.*



GAMBAR 5.2 DUA BUAH VEKTOR YANG SAMA

Definisi 5.3 *Misalkan $\vec{u}$ – $\vec{v}$ adalah dua buah vektor sembarang. Jumlahan $\vec{u} + \vec{v}$ adalah vektor yang dapat digambarkan sebagai segmen berarah di mana titik inisialnya berimpit dengan titik inisial $\vec{u}$ dan titik terminalnya berimpit dengan titik terminal $\vec{v}$.*



GAMBAR 5.3 PENJUMLAHAN DUA BUAH VEKTOR

Pada Gambar 5.3 (a) dan (b) dapat kita lihat vektor jumlahan $\vec{u} + \vec{v}$ dan $\vec{v} + \vec{u}$, selanjutnya pada (c) dapat kita lihat bahwa vektor:

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}. \tag{5.1}$$

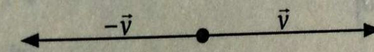
Oleh karena itu, dalam operasi penjumlahan dua buah vektor berlaku sifat komutatif. Sebuah **vektor nol** merupakan vektor yang panjangnya adalah nol dan dinotasikan dengan $\vec{0}$. Sehingga untuk sembarang vektor $\vec{v}$, berlaku:

$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}.$$

Misalkan $\vec{v}$ adalah sebuah vektor tak nol, maka $-\vec{v}$ adalah vektor yang panjangnya sama dengan $\vec{v}$, namun arahnya berlawanan dengan arah $\vec{v}$. Sehingga:

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = 0 \tag{5.2}$$

Gambar 5.4 memperlihatkan $\vec{v}$ dan $-\vec{v}$.



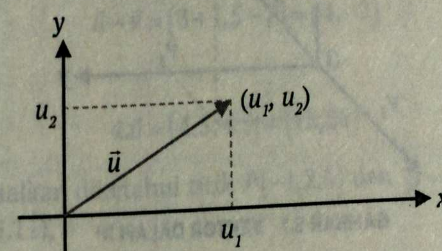
GAMBAR 5.4 DUA BUAH VEKTOR YANG SALING BERLAWANAN ARAH

Definisi 5.4 *Misalkan $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ adalah dua buah vektor sembarang. Pengurangan $\vec{v}$ dari $\vec{u}$ adalah:*

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}). \tag{5.3}$$

Bila kita lukiskan secara geometris, vektor $\vec{u}$ – $\vec{v}$ adalah vektor yang titik inisialnya adalah titik terminal dari $\vec{v}$ dan titik terminalnya adalah titik terminal dari $\vec{u}$.

Dalam ruang R^2, sebuah vektor $\vec{u}$ dapat dinyatakan dengan $\vec{u} = (u_1, u_2)$. Vektor ini dapat dilukiskan pada koordinat kartesius. Perhatikan gambar berikut ini.



GAMBAR 5.5 VEKTOR DALAM R²

Misalkan diketahui $\vec{u} = (u_1, u_2), \vec{v} = (v_1, v_2)$ dan suatu skalar k. Penjumlahan $\vec{u} + \vec{v}$, pengurangan $\vec{u} - \vec{v}$, dan hasil kali skalar $k.\vec{v}$ masing-masing adalah:

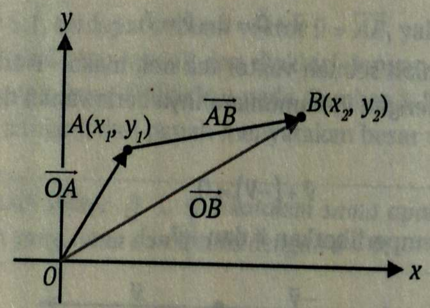
$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2), \tag{5.4}$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2), \tag{5.5}$$

$$k.\vec{v} = (k.v_1, k.v_2) \tag{5.6}$$

Jika $\vec{u} = \vec{v}$, maka $u_1 = v_1$ dan $u_2 = v_2$.

Andaikan diberikan titik koordinat $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$, maka vektor $\overrightarrow{AB}$ dapat digambarkan sebagai berikut.

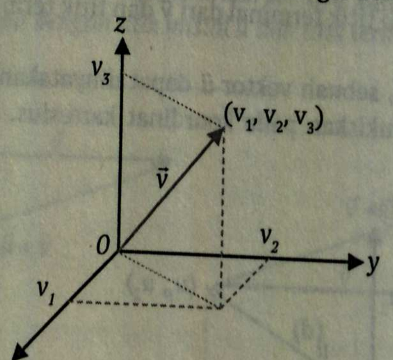


GAMBAR 5.6 DUA BUAH TITIK PADA R²

Pada Gambar 5.6, vektor $\overrightarrow{AB}$ merupakan selisih $\overrightarrow{OB}$ dan $\overrightarrow{OA}$, atau dapat dituliskan sebagai:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \tag{5.7}$$

Selanjutnya dalam ruang R^3, sebuah vektor $\vec{v}$ dapat dinyatakan dengan $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Vektor ini dapat digambarkan sebagai berikut:



GAMBAR 5.7 VEKTOR DALAM R³

Misalkan diketahui $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dan suatu skalar k. Bentuk (5.4), (5.5), dan (5.6) menjadi:

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3), \tag{5.8}$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3), \tag{5.9}$$

$$k.\vec{v} = (k.v_1, k.v_2, k.v_3) \tag{5.10}$$

Andaikan diberikan titik koordinat $A(x_1, y_1, z_1)$ dan $B(x_2, y_2, z_2)$, maka bentuk (5.7) menjadi:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \tag{5.11}$$

Dalam teorema berikut ini, terdapat sifat-sifat dasar dari ilmu hitung vektor.

Teorema 5.5 *Jika $\vec{u}$, $\vec{v}$, dan $\vec{w}$ adalah vektor-vektor di R^2 atau R^3 dan k serta ℓ adalah skalar, maka:*

(i) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

(ii) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

(iii) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$

(iv) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

(v) $k(\ell\vec{u}) = (k\ell)\vec{u}$

(vi) $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{u}$

(vii) $(k + \ell)\vec{u} = k\vec{u} + \ell\vec{u}$

(vii) $1\vec{u} = \vec{u}$

Bukti diserahkan kepada pembaca sebagai latihan. Misalkan dalam R^2 vektor $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$, dan $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$. Untuk R^3, misalkan $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, dan $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$.

Agar pembaca dapat memahami tentang operasi-operasi dasar pada vektor, perhatikanlah Contoh 5.1 dan 5.2.

Contoh 5.1. Diketahui dua buah vektor $\vec{u}$ = (3,5) dan $\vec{v}$ = (-1,7), maka:

$$\vec{u} + \vec{v} = (3 - 1, 5 + 7) = (2, 12)$$
$$\vec{u} - \vec{v} = (3 + 1, 5 - 7) = (4, -2)$$

dan

$$4.\vec{u} = (4.3, 4.5) = (12, 20)$$ □

Contoh 5.2. Misalkan diketahui titik $P(-1,2,3)$ dan $Q = (-7,4,-5)$. Dengan menggunakan (5.11),

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (-6, 2, -8),$$

dan

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = (6, -2, 8).$$ □

Dari Contoh 5.2, terlihat bahwa:

$$\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP} \tag{5.12}$$

5.1.2 Norma Vektor dan Jarak

Pada bagian ini akan kita bahas mengenai norma suatu vektor, jarak antara dua buah titik dan jarak antara titik dengan sebuah garis. Definisi dari norma suatu vektor sebagai berikut.

Definisi 5.6 *Panjang vekto $\vec{v}$ disebut sebagai norma yang dinotasikan dengan* $\|\vec{v}\|$.

Di dalam R^2, misalkan $\vec{v} = (v_1, v_2)$. Dengan menggunakan Teorema Phytagoras, norma dari $\vec{v}$ adalah:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \tag{5.13}$$

Di dalam R^3, misalkan $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Bentuk (5.13) menjadi:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \tag{5.14}$$

Contoh 5.3 Diketahui $\vec{v} = (-3, -4, 5)$, dengan menggunakan bentuk (5.14), norma dari $\vec{v}$ adalah:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

□

Misalkan diketahui titik $A = (x_1, y_1)$ dan titik $B = (x_2, y_2)$ dalam R^2, norma dari vektor $\overrightarrow{AB}$ adalah:

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{5.15}$$

Dan di dalam R^3, misalkan diketahui titik $A = (x_1, y_1, z_1)$ dan titik $B = (x_2, y_2, z_2)$, norma dari vektor $\overrightarrow{AB}$ adalah:

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{5.16}$$

Apabila berbicara tentang dua buah, titik yaitu A dan B, norma dari $\overrightarrow{AB}$ atau $\|\overrightarrow{AB}\|$ merupakan **jarak** antara titik A dan B. Jarak disimbolkan dengan D yang merupakan singkatan dari kata *distance*. Perhatikan contoh berikut.

Contoh 5.4. Jika diketahui titik $P = (-1, 2, -3)$ dan titik $Q = (2, 4, 3)$, maka:

$$\overrightarrow{PQ} = (2+1, 4-2, 3+3) = (3, 2, 6).$$

Sehingga:

$$D(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7.$$

Oleh karena itu, jarak antara titik P dan A adalah 7 satuan. □

Misalkan diketahui titik $P(x_1, y_1)$ dan sebuah garis $ax + by + c = 0$. Jarak antartitik P dengan garis $ax + by + c = 0$ dirumuskan sebagai:

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{5.17}$$

Misalkan diketahui titik $P(x_1, y_1, z_1)$ dan sebuah bidang $ax + by + cz + d = 0$. Jarak antartitik P dengan bidang $ax + by + cz + d = 0$ dirumuskan sebagai:

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \tag{5.18}$$

Contoh 5.5 Jarak antara titik $A(-2, 3, -6)$ dan bidang $2x - 3y + 4z = -2$ adalah:

$$D = \frac{|2(-2) - 3(3) + 4(-6) + 2|}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-6)^2}} = \frac{|-35|}{\sqrt{49}} = \frac{35}{7} = 5$$

Jadi, jaraknya adalah 5 satuan.

LATIHAN 5.1

1. Gambarkanlah masing-masing vektor di bawah ini dalam R^2 atau R^3 dengan titik pusatnya sebagai titik inisial.
   (a) $\vec{u_1} = (3, -3)$
   (b) $\vec{u_2} = (0, 3)$
   (c) $\vec{u_3} = (-1, 0)$
   (d) $\vec{u_4} = \left(2\frac{1}{2}, -1\frac{1}{4}\right)$
   (e) $\vec{u_5} = (3, 4, 2)$
   (f) $\vec{u_6} = (-2, 1, 4)$
   (g) $\vec{u_7} = (3, 0, 2)$
   (h) $\vec{u_8} = (-2, 0, 0)$
2. Carilah vektor $\overrightarrow{AB}$ jika diketahui titik-titik:
   (a) A(3, 2), B = (5, 1)
   (b) A(-2,-4), B(1,-7)
   (c) A(2, 1,-5), B=(0, 2,-4)
   (d) $A\left(-2, -\frac{1}{2}, 3\right)$, $B = \left(3, 4\frac{2}{5}, 7\frac{1}{3}\right)$
3. Diketahui titik $P(1, 3, -4)$ *dan* $\vec{v} = (7, 1, -2)$. Carilah:
   (a) titik Q sehingga $\overrightarrow{QP} = \vec{v}$
   (b) titik R sehingga $\overrightarrow{PR} = -\vec{v}$
4. Misalkan $\vec{a} = (3, 4, 7)$, $\vec{b} = (-4, -2, 7)$, $\vec{c} = (1, -8, -9)$. Tentukan:
   (a) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$
   (b) $2\vec{a} - 3\vec{b}$
   (c) $-5(-3\vec{a} + 2\vec{c})$
   (d) $-\vec{c} - (-4\vec{b} + \vec{a})$
5. Dari vektor-vektor pada soal nomor 4, carilah skalar k_1, k_2, dan k_3 sehingga:
   $$k_1\vec{a} + k_2\vec{b} - k_3\vec{c} = (1, 2, 3).$$
6. Jika $k_1(2, -2, 3) + k_2(4, -3, 5) + k_3(-2, 5, -6) = (0, 1, 2)$, maka perlihatkanlah bahwa tidak ada skalar k_1, k_2, dan k_3 yang memenuhi.
7. Carilah skalar k_1, k_2, dan k_3 sehingga:
   $$k_1(-1, 2, 1) + k_2(1, -2, -1) + k_3(2, 1, -3) = (0, 0, 0).$$

8. Hitunglah norma dari masing-masing vektor pada soal nomor 1.
9. Hitunglah jarak dari titik A ke titik B, jika A dan B adalah titik-titik pada soal nomor 2.
10. Dari titik A dan B dari soal nomor 2, tentukan titik tengah dari ruas AB.
11. Hitunglah norma dari soal nomor 4 (a), (b), (c), dan (d).
12. Jika $\vec{v}$ tak nol, maka perlihatkan bahwa $\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ mempunyai norma 1.
13. Hitunglah jarak antara titik $Q(1,3)$ dengan garis:
    (a) $-3x + 4y = 7$
    (b) $x - 3y + 4 = 0$
    (c) $-2x - 3y = 0$
    (d) $4y = 3x - 5$
14. Jika jarak antara titik P(1,a) dengan garis $-2x - y = 5$ adalah 6, maka tentukanlah semua bilangan skalar a yang mungkin.
15. Hitunglah jarak yang dari titik $A(1, 3, 5)$ ke bidang $2x - 4y + 3z = -5$.
16. Buktikanlah Teorema 5.5 (ii), (iv), (v), (vi), dan (vii) dalam ruang R^2 atau R^3.
17. Jika $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ adalah vektor-vektor di R^2 atau R^3, maka buktikan secara analitis dan geometris bahwa:

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| \le \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

Bentuk ini dinamakan sebagai pertidaksamaan segitiga.

5.2 RUANG-RUANG VEKTOR

5.2.1 Ruang R^n

Pada bagian 5.1, kita hanya membahas tentang R^2 dan R^3. Bagaimana bila ruang diperluas menjadi R^4, R^5 atau bahkan sampai R^n? Berikut ini merupakan definisi dari ruang R^n.

Definisi 5.7 *Ruang R^n atau ruang-n Euclidean adalah suatu himpunan dari semua urutan bilangan real yang berorde-n $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.*

Sebagai ilustrasi dari Definisi 5.7, misalkan:
(1) R^3 untuk , himpunannya adalah (1,3,4), (-1,0,2), (2,1,4), ...
(2) R^4 untuk , himpunannya adalah (1,1,1,1), (2,1,0,5), (0,1,-3,0), ...

Sebagai latihan, pembaca dapat menambahkan himpunan R^2 dan R^3.

Sifat-sifat dalam ilmu hitung vektor dalam ruang-*n* Euclidean termuat dalam teorema berikut ini.

Teorema 5.8 *Jika $\vec{u}=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$, $\vec{v}=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$, dan $\vec{w}=(w_1,w_2,\ldots,w_n)$ adalah vektor-vektor pada R^n dan k serta l adalah skalar, maka:*

(*i*) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$
(*ii*) $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$
(*iii*) $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$
(*iv*) $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$
(*v*) $k(\ell\vec{u})=(k\ell)\vec{u}$
(*vi*) $k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{u}$
(*vii*) $(k+\ell)\vec{u}=k\vec{u}+\ell\vec{u}$
(*viii*) $1\vec{u}=\vec{u}$

Bukti diserahkan kepada pembaca sebagai latihan. Pada dasarnya Teorema 5.8 sama dengan Teorema 5.5, hanya saja pembahasan sebelumnya hanya dalam R^2 dan R^3.

Misalkan $\vec{u}=(u_1,u_2,\ldots u_n)$, $\vec{v}=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ dan k adalah skalar. Operasi penjumlahan (5.19) dan perkalian skalar (5.20) merupakan operasi standar (baku) pada R^n, yaitu:

$$\vec{u}+\vec{v}=(u_1+v_1,u_2+v_2,\ldots,u_n+v_n) \tag{5.19}$$

$$k.\vec{u}=(k.u_1,k.u_2,\ldots,k.u_n) \tag{5.20}$$

$$\vec{u}.\vec{v}=u_1v_1+u_2v_2+\ldots+u_nv_n \tag{5.21}$$

Pada bentuk (5.21), $\vec{u}.\vec{v}$ disebut sebagai perkalian titik (dot) dan sering juga ditulis sebagai $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$. Sehingga $\vec{u}.\vec{v} = \langle\vec{u},\vec{v}\rangle$.

Misalkan $\vec{u}$ di R^n dari persamaan (5.13), norma dari vektor $\vec{u}$ diperluas menjadi:

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{u_1^2+u_2^2+\ldots+u_n^2}. \tag{5.22}$$

Dan jarak antara dua buah vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ di R^n merupakan perluasan dari persamaan (5.15), yaitu:

$$D=\|\vec{u}-\vec{v}\|=\sqrt{(u_1-v_1)^2+(u_2-v_2)^2+\ldots+(u_n-v_n)^2} \tag{5.23}$$

Contoh 5.6 Misalkan diketahui dua buah vektor $\vec{v}=(1,4,5,-1)$ dan $\vec{w}=(-1,0,3,-2)$. Perkalian titik $\vec{v}.\vec{w}$ adalah:

$$\begin{aligned}\vec{v}.\vec{w}&=1(-1)+4(0)+5(3)+(-1)(-2)\\&=16\end{aligned}$$

□

Contoh 5.7 Jika diketahui $\vec{u}=(3,1,4,5,6)$ dan $\vec{v}=(-4,0,-3,7,-2)$, maka $\vec{u}+\vec{v}$ dan $\vec{u}-\vec{v}$ adalah:

$\vec{u}+\vec{v}=(-1,1,1,12,4)$, $\vec{u}-\vec{v}=(7,1,7-2,8)$.

Norma dari vektor $\vec{v}$ adalah:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + (-3)^2 + 7^2 + (-2)^2} = \sqrt{78}.$$

Jarak antara $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ adalah:

$$D = \|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{7^2 + 1^2 + 7^2 + (-2)^2 + 8^2} = \sqrt{167}.$$

□

5.2.2 Ruang Vektor Umum

Pada bagian ini akan kita bahas tentang sekumpulan aksioma yang bila dipenuhi oleh sekumpulan himpunan, maka himpunan tersebut kita sebut sebagai vektor. Berikut ini diberikan definisi ruang vektor umum.

Definisi 5.9. *Misalkan V adalah sembarang himpunan dengan unsur-unsur yang berada di dalamnya diberikan dua buah operasi, yaitu penjumlahan dan perkalian skalar. Jika sepuluh aksioma berikut ini dipenuhi oleh $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, pada V dan oleh semua skalar k dan l, maka kita dapat menyebut V sebagai* ***ruang vektor*** *dan unsur-unsur yang berada di dalamnya kita sebut sebagai vektor.*

(1) *Jika* $\vec{u}, \vec{v} \in V$ maka $\vec{u} + \vec{v} \in V$

(2) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

(3) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$

(4) *Terdapat unsur* $\vec{0} \in V$ *sehingga* $\vec{0} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$, *untuk semua* $\vec{u} \in V$

(5) *Untuk setiap* $\vec{u} \in V$, *terdapat* $\vec{u} \in V$ *sehingga* $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = 0$

(6) *Jika* $\vec{u} \in V$ *adalah sembarang unsur dan k adalah suatu skalar, maka* $k.\vec{u} \in V$

(7) $k(\vec{u} + \vec{v}) = k.\vec{u} + k.\vec{v}$

(8) $(k + \ell)\vec{u} = k\vec{u} + \ell\vec{u}$

(9) $k(\ell\vec{u}) = (k\ell)\vec{u}$

(10) $1\vec{u} = \vec{u}$

Aksioma (1) dan (6) yang tertera pada Definisi 5.9, merupakan operasi penjumlahan standar dan operasi perkalian skalar standar dalam R^n yang tertera pada persamaan (5.19) dan (5.20). Agar pembaca dapat memahami tentang ruang vektor umum, perhatikanlah contoh berikut ini.

Contoh 5.8. Misalkan diberikan himpunan vektor di R^3, yang didefinisikan oleh:

$$V = \{(x, y, z) | x, y, z \in R\}$$

Akan diperlihatkan bahwa V adalah ruang vektor. Misalkan $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ dan $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2) \in V$. Dengan menggunakan aksioma (1) diperoleh:

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in V$$

Aksioma (2), (3), (4), dan (5) cukup mudah untuk diperlihatkan. Bukti-

nya diberikan kepada pembaca sebagai latihan. Lalu dengan menggunakan aksioma (6), di mana k adalah sembarang skalar real diperoleh:

$$k.\vec{u} = (k.x_1, k.x_2) \in V$$

Aksioma (7), (8), (9), dan (10) diberikan kepada pembaca sebagai latihan. □

Sebagai perluasan dari Contoh 5.8, jika $V = R^n$ (R^n adalah ruang-*n* Euclidean) di mana operasi penjumlahan standar dan operasi perkalian skalar standar dipenuhi, maka V merupakan ruang vektor. Walaupun pada operasi penjumlahan dan perkalian standar di R^n hanya memenuhi aksioma (1) dan (6), namun untuk kedelapan aksioma lainnya juga ikut terpenuhi. Hal ini dikarenakan kedelapan aksioma lainnya telah dijamin oleh Teorema 5.8. Ruang-*n* Euclidean merupakan ruang vektor yang unsur-unsurnya berupa vektor. Contoh 5.9 dan 5.10 berikut ini merupakan sebuah ruang vektor, meskipun unsur-unsurnya bukan vektor.

Contoh 5.9. Misalkan V adalah himpunan semua polinom berderajat 2, yang didefinisikan sebagai:

$$V = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \,|\, a_0, a_1, a_2 \in R\}$$

Untuk memperlihatkan bahwa V adalah ruang vektor, kita cukup memperlihatkan bahwa aksioma (1) dan (6) terpenuhi. Misalkan $f(x) = f_0 + f_1x + f_2x^2$ dan $g(x) = g_0 + g_1x + g_2x^2$ berada di V, operasi penjumlahannya adalah:

$$f(x) + g(x) = (f_0 + g_0) + (f_1 + g_1)x + (f_2 + g_2)x^2 \in V$$

Oleh karena itu, aksioma (1) terpenuhi. Untuk sembarang skalar real k, diperoleh:

$$k.f(x) = kf_0 + kf_1x + kf_2x^2$$

Oleh karena itu, aksioma (6) terpenuhi. Lihatlah bahwa pada operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar, yang dijumlahkan atau dikalikan berupa koefisiennya saja, sedangkan variabelnya tetap. Jika kita ambil koefisien-koefisien dari V lalu kita gabungkan maka akan tampak seperti sebuah vektor yaitu (a_0, a_1, a_2). Sehingga Teorema 5.8 dapat menjamin bahwa kedelapan aksioma lainnya akan terpenuhi. □

Sebuah polinom berderajat pada umumnya disimbolkan dengan P_n, yakni

$$P_n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

di mana $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$. Pada Contoh 5.9, P_2 dapat diperluas untuk P_n. Sehingga P_n merupakan ruang vektor.

Contoh 5.10 Misalkan A adalah himpunan matriks yang berukuran 2 x 2 atau M_{2x2} yang berbentuk:

$$A=\left\{\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}, a,b,c,d\in R\right\}$$

Ambil sembarang matriks $B,C\in A$ yakni:

$$B=\begin{bmatrix} a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{bmatrix} \text{ dan } C=\begin{bmatrix} a_2 & b_2\\ c_2 & d_2\end{bmatrix}$$

Hasil dari operasi penjumlahan $B + C$ adalah:

$$B+C=\begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2\\ c_1+c_2 & d_1+d_2\end{bmatrix}\in A$$

Sehingga aksioma (1) terpenuhi. Selanjutnya untuk sembarang skalar real k, perkalian skalar

$$k.B=\begin{bmatrix} ka_1 & kb_1\\ kc_1 & kd_1\end{bmatrix}\in A$$

Sehingga aksioma (6) terpenuhi. Pembuktian kedelapan aksioma lainnya diserahkan kepada pembaca sebagai latihan. □

Pada Contoh 5.8 sampai 5.10, untuk memperlihatkan sebuah himpunan merupakan ruang vektor haruslah memenuhi 10 aksioma tersebut. Jika kita ingin memperlihatkan bahwa sebuah himpunan bukan merupakan ruang vektor, kita cukup memperlihatkan bahwa salah satu dari kesepuluh aksioma tersebut tidak terpenuhi. Perhatikanlah contoh berikut ini.

Contoh 5.11. Misalkan A adalah himpunan matriks yang berbentuk:

$$A=\left\{\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}, a+d=-1\right\}$$

Secara informal, kita dapat mengambil dua buah contoh matriks A untuk sembarang a dan c yaitu $\begin{bmatrix} 2 & b\\ c & -3\end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} -1 & b\\ c & 0\end{bmatrix}$. Penjumlahan kedua matriks tersebut adalah:

$$\begin{bmatrix} 2 & b\\ c & -3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -1 & b\\ c & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & b\\ c & -3\end{bmatrix}$$

Lihatlah bahwa $1 + (-3) \neq -1$. Oleh karena itu aksioma (1) tidak terpenuhi. Sehingga A bukan ruang vektor.

Pembuktian secara formalnya dapat kita lakukan dengan memisalkan B, $C \in A$ yaitu:

$$B=\begin{bmatrix} a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{bmatrix} \text{ dan } C=\begin{bmatrix} a_2 & b_2\\ c_2 & d_2\end{bmatrix}$$

Dengan operasi penjumlahan:

$$B+C=\begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2\\ c_1+c_2 & d_1+d_2\end{bmatrix}.$$

Namun:

$$(a_1+a_2)+(d_1+d_2)=(a_1+d_1)+(a_2+d_2)=-1+(-1)\neq -1.$$

Sehingga aksioma (1) tidak terpenuhi dan A bukan ruang vektor. □

5.2.2 Subruang

Pada bagian ini akan kita bahas tentang subruang. Definisi tentang subruang sebagai berikut.

Definisi 5.10 *Misalkan W adalah subhimpunan dari ruang vektor V atau $W \subseteq V$. W dikatakan sebagai subruang jika W itu juga merupakan ruang vektor di bawah operasi penjumlahan dan perkalian skalar yang didefinisikan pada V.*

Untuk memperlihatkan bahwa W adalah subruang, kita tidak perlu membuktikan keseluruhan aksioma yang pada ruang vektor V. Teorema berikut ini menjamin bahwa W adalah sebuah subruang dari V, yang di dalamnya melibatkan aksioma (1) dan (6) pada V.

Teorema 5.11 *Jika W adalah himpunan yang memuat satu atau lebih vektor dari sebuah ruang vektor V, maka W adalah subruang dari V jika dan hanya jika syarat berikut ini dipenuhi.*

(i) Jika $\bar{u},\bar{v}\in W$, maka $\bar{u}+\bar{v}\in W$.

(ii) Jika k adalah sembarang skalar dan $\bar{u}$ adalah sembarang vektor di W, maka $k.\bar{u}\in W$.

Bukti. Jika W adalah subruang dari V, maka menurut Definisi 5.10 W memenuhi kesepuluh aksioma pada ruang vektor V; khususnya memenuhi aksioma (1) dan (6). Dalam hal ini, aksioma (1) dan (6) masing-masing merupakan syarat (i) dan (ii).

($\Rightarrow$) Sebaliknya, andaikan syarat (i) dan (ii) dipenuhi oleh W, kedua syarat tersebut merupakan aksioma (1) dan (6) pada ruang vektor V, sehingga kita cukup memperlihatkan bahwa W memenuhi kedelapan aksioma lainnya. Karena aksioma (1) dan (6) telah dipenuhi, aksioma (2), (3), (7), (8), (9), dan (10) secara otomatis dipenuhi oleh W. Sekarang, kita perlihatkan bahwa aksioma (4) dan (5) juga dipenuhi.

Misalkan kita ambil sembarang $\bar{u}\in W$. Dari syarat (ii), $k.\bar{u}\in W$ untuk sembarang skalar k. Jika $k = 0$, maka $0.\bar{u}=\bar{0}$ juga berada di W. Sehingga aksioma (4) dipenuhi oleh W. Jika $k = -1$, maka $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$ berada di W. Oleh karena itu, aksioma (5) terpenuhi.

Contoh 5.12. Misalkan $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_2 = -x_3\}$. Akan diperlihatkan bahwa W merupakan subruang dari R^4. Ambil sembarang unsur $\vec{a}, \vec{b} \in W$ dengan:

$$\vec{a} = (a_1, -a_3, a_3, a_4) \text{ dan } \vec{b} = (b_1, -b_3, b_3, b_4)$$

Sehingga:

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= (a_1 + b_1, -a_3 - b_3, a_3 + b_3, a_4 + b_4) \\ &= (a_1 + b_1, -(a_3 + b_3), a_3 + b_3, a_4 + b_4) \in W,\end{aligned}$$

dan untuk sembarang skalar k,

$$k.\vec{a} = (k.a_1, k.(-a_3), k.a_3, k.a_4) = (ka_1, -ka_3, ka_3, ka_4) \in W$$

Oleh karena itu, syarat (i) dan (ii) terpenuhi dan kita simpulkan bahwa W merupakan subruang dari R^4. □

Contoh 5.13 Misalkan A adalah himpunan matriks yang berbentuk:

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}; a, b, c \in R \right\}$$

Akan diperlihatkan bahwa A merupakan subruang dari ruang vektor M_{2x2}.

Ambil dua buah matriks $B = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & c_1 \end{bmatrix}$ dan $C = \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix}$ yang berada di A sedemikian sehingga:

$$B + C = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ b_1 + b_2 & c_1 + c_1 \end{bmatrix} \in A$$

dan untuk sembarang skalar k diperoleh:

$$kB = \begin{bmatrix} ka_1 & 0 \\ kb_1 & kc_1 \end{bmatrix} \in A$$

Oleh karena itu, syarat (i) dan (ii) dipenuhi dan merupakan subruang dari M_{2x2}. □

Catatan: Sebuah vektor ruang V memiliki sedikitnya 2 buah subruang, yaitu V itu sendiri dan himpunan {0}. Himpunan {0} hanya terdiri dari vektor nol atau $\vec{0}$ dan disebut dengan subruang nol. Terkadang dengan memperlihatkan adanya unsur $\vec{0} \in V$, kita dapat menggunakannya untuk membuktikan bahwa suatu himpunan bukan merupakan subruang.

Contoh 5.14. Misalkan B adalah himpunan matriks yang berbentuk:

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; a, b, c, d \in N \right\}$$

Karena a, b, c, dan d merupakan bilangan asli N, maka matriks nol bukan merupakan anggota B. Sehingga B bukan merupakan subruang dari M_{2x2}.

Cara lain, kita dapat memisalkan matriks-matriks C, D, ∊ B. Di mana:

$$C = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \text{ dan } D = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$$

Jelaslah bahwa syarat (i) dari Teorema 5.11 terpenuhi (pembaca dapat memperlihatkan sendiri). Sekarang kita perlihatkan syarat (ii). Untuk sembarang skalar k, diperoleh:

$$kC = \begin{bmatrix} ka_1 & kb_1 \\ kc_1 & kd_1 \end{bmatrix} \notin B$$

Hal ini disebabkan oleh $k \in R$, demikian halnya ka_1, kb_1, kc_1, kd_1 juga bilangan real. Hal ini bertentangan dengan himpunan B yang unsur-unsurnya adalah bilangan asli. Oleh karena itu, B bukan merupakan subruang dari M_{2x2}. □

5.2.3 Kombinasi Linier

Pada bagian ini akan kita bahas mengenai kombinasi linier (*linier combinations*). Definisinya sebagai berikut.

Definisi 5.12 *Sebuah vektor $\vec{w}$ disebut sebagai* ***kombinasi linier*** *dari vektor-vektor $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$, jika $\vec{w}$ dapat dinyatakan dalam bentuk:*

$$\vec{w} = k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \ldots + k_n\vec{v}_n \tag{5.23}$$

Di mana k_1, k_2, ..., k_n merupakan skalar.

Dalam kombinasi linier, pertama sekali kita membentuk suatu sistem persamaan linier yang dihasilkan dari persamaan (5.23). Kemudian kita ditugaskan untuk mencari nilai-nilai dari k_1, k_2, ..., k_n. Untuk itu, sistem persamaan linier yang nantinya terbentuk haruslah konsisten. Bila tidak konsisten, maka vektor $\vec{w}$ bukan merupakan kombinasi linier. Agar pembaca dapat memamami tentang kombinasi linier. Pembaca dapat memperhatikan contoh berikut.

Contoh 5.15. Misalkan vektor-vektor $\vec{u} = (2, 1, -1)$ dan $\vec{v} = (1, -2, 3)$ berada di R^3. Akan diperlihatkan bahwa $\vec{a} = (-3, -4, 5)$ merupakan kombinasi linier dari $\vec{u}$ dan $\vec{v}$.

Agar $\vec{a}$ merupakan kombinasi linier dari $\vec{u}$ dan $\vec{v}$, harus ada skalar k_1 dan

k_2 sedemikian sehingga $\vec{a} = k_1\vec{u} + k_2\vec{v}$. Dengan menuangkan bentuk vektor ke dalam matriks, diperoleh:

$$\begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Akan terdapat tiga buah persamaan, yaitu:

$$2k_1 + k_2 = -3$$
$$k_1 - 2k_2 = -4$$
$$-k_1 + 3k_2 = 5$$

Dengan menyelesaikan persamaan ini (gunakan eliminasi Gauss atau Gauss-Jordan), diperoleh $k_1 = -2$ dan $k_2 = 1$ (konsisten), sehingga:

$$\vec{a} = -2\vec{u} + \vec{v}.$$

Oleh karena itu, $\vec{a}$ merupakan kombinasi linier dari $\vec{u}$ dan $\vec{v}$. □

Contoh berikut ini memperlihatkan bahwa suatu vektor bukan merupakan kombinasi linier dari vektor-vektor lainnya.

Contoh 5.16 Dengan menggunakan vektor-vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ dari Contoh 5.15, akan diperlihatkan bahwa $\vec{b} = (2, 1, 4)$. Supaya $\vec{b}$ merupakan kombinasi linier dari $\vec{u}$ dan $\vec{v}$, haruslah terdapat skalar k_1 dan k_2 sedemikian sehingga $\vec{b} = k_1\vec{u} + k_2\vec{v}$. Dengan menuangkan bentuk vektor ke dalam matriks, diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Akan terdapat tiga buah persamaan, yaitu:

$$2k_1 + k_2 = 2$$
$$k_1 - 2k_2 = 1$$
$$-k_1 + 3k_2 = 4$$

Sistem persamaan tersebut tidak konsisten (buktikan), sehingga tidak akan terdapat skalar k_1 dan k_2 yang memenuhi. Oleh karena itu, $\vec{b}$ bukan merupakan kombinasi linier dari $\vec{u}$ dan $\vec{v}$. □

Selanjutnya kita bahas mengenai vektor-vektor yang **merentang** (*span*) pada ruang vektornya. Definisinya sebagai berikut.

Definisi 5.13 *Misalkan V merupakan ruang vektor dan S adalah himpunan vektor di V,* $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ *dengan* $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in V$. *Jika untuk sembarang vektor* $\vec{v}$ *di V merupakan kombinasi linier dari vektor-vektor di S, yakni:*

$$\vec{v} = k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \ldots + k_n\vec{v}_n \quad (5.24)$$

dengan $k_1, k_2, \ldots, k_n$ *merupakan skalar. Maka S dikatakan merentang (membangun) V atau V direntangkan oleh S.*

Contoh 5.17 Perlihatkan bahwa vektor-vektor

$$\vec{v}_1 = (2,1,-4), \vec{v}_2 = (-2,1,3), \text{ dan } \vec{v}_3 = (1,3,2)$$

merentang R^3. *Pertama*, ambil sembarang vektor $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ pada R^3. Kemudian $\vec{a}$ dapat dinyatakan dalam kombinasi linier:

$$\vec{a} = k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + k_3\vec{v}_3$$

Dengan menuangkan vektor ke dalam bentuk matriks, yakni:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

akan terdapat tiga buah persamaan, yaitu:

$$2k_1 - 2k_2 + k_3 = a_1$$
$$k_1 + k_2 + 3k_3 = a_2$$
$$-4k_1 + 3k_2 + 2k_3 = a_3$$

Sekarang akan kita perlihatkan apakah sistem persamaan linier tersebut mempunyai penyelesaian (konsisten) atau tidak. Kita ambil matriks koefisien A, matriks konstan B dan matriks variabel K yakni:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -4 & 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

Sehingga sistem persamaan linier tersebut dapat dituliskan dalam bentuk persamaan matriks:

$$AK = B$$

Dengan menggunakan Teorema 4.10, penyelesaiannya adalah tepat satu yakni:

$$K = A^{-1}B$$

Kita lihat bahwa *det(A)* = 21, dapat kita katakan bahwa A dapat dibalik, sehingga mempunyai *invers*. Jadi, untuk sembarang nilai a_1, a_2, a_3 kita dapat menentukan nilai k_1, k_2, k_3. Oleh karena itu, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ merentang R^3. □

Contoh 5.18 Perlihatkan bahwa vektor-vektor

$$\vec{e}_1=(1,0,0,0),\ \vec{e}_2=(0,1,0,0),\ \vec{e}_3=(0,0,1,0) \text{ dan } \vec{e}_4=(0,0,0,1)$$

merentang di R^4. Dengan melakukan serangkaian cara pada Contoh 5.16, untuk sembarang vektor a = (a_1, a_2, a_3, a_4) diperoleh bentuk persamaan:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = k_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_4\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh $k_1 = a_1$, $k_2 = a_2$, $k_3 = a_3$, dan $k_4 = a_4$. Karena sistem persamaan ini konsisten, maka $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4$ merentang R^4. Dan $\vec{a}$ dapat kita tuliskan sebagai:

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 + a_4\vec{e}_4$$

yang merupakan kombinasi linier $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$, dan $\vec{e}_4$. □

Kita akan perluas Contoh 5.18 ke dalam R^n. Misalkan vektor-vektor:

$$\vec{e}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\ \vec{e}_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\ \ldots,\ \vec{e}_n=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

maka himpunan $\vec{e}=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n\}$ merentang R^n. Vektor-vektor $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$ disebut sebagai vektor-vektor satuan di R^n.

LATIHAN 5.2

1. Diketahui $\vec{u}=(3,1,4,5)$, $\vec{v}=(5,-2,-3,2)$, dan $\vec{w}=(0,1-4,7)$. Tentukanlah:
   (a) $\vec{u}+2\vec{v}-3\vec{w}$
   (b) $\vec{u}.\vec{v}-\vec{w}.\vec{w}$
   (c) $\|\vec{u}-\vec{v}\|$
   (d) $\square\vec{w}.\vec{w}\square$
2. Dari vektor-vektor pada soal nomor 1, carilah vektor $\vec{y}$ sehingga $2\vec{u}-\vec{v}-4\vec{y}=3\vec{v}-8\vec{w}$.
3. Perlihatkan bahwa jika adalah vektor tak nol di R^n, maka $\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ mempunyai norma 1.
4. Jika $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ adalah vektor-vektor pada R^n buktikanlah identitas berikut:
   (a) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|$
   (b) $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|$
   (c) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2+\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=2\|\vec{u}\|^2+2\|\vec{v}\|^2$
   (d) $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{4}\|\vec{u}+\vec{v}\|-\frac{1}{4}\|\vec{u}-\vec{v}\|$

5. Buktikan Teorema 5.8.
6. Perlihatkan bahwa himpunan semua tripel bilangan real (*a*, *b*, *c*) di R^3 dengan operasi-operasi $(a, b, c) + (a', b', c') = (a + a', b + b', c + c')$ dan $k(a, b, c) = (a, b, c)$ adalah ruang vektor.
7. Perlihatkan bahwa himpunan semua *tuple*-4 bilangan real (*a*, *b*, *c*, *d*, *e*) di R^5 adalah ruang vektor dengan operasi penjumlahan baku dan perkalian skalar baku di R^5.
8. Perlihatkan bahwa himpunan $S = (a, b, c)$ di R^3 dengan $a, b, c > 0$ merupakan ruang vektor dengan operasi-operasi baku di R^3.
9. Misalkan himpunan $A=\left\{\begin{bmatrix} a & 1 \\ b & c \end{bmatrix}; a,b,c \in R\right\}$. Buktikanlah bahwa *A* merupakan ruang vektor dengan penjumlahan dan perkalian skalar matriks.
10. Perlihatkanlah bahwa himpunan matriks berukuran 2 x 2 yang berbentuk $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dengan $bc = 0$ merupakan ruang vektor dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar matriks.
11. Diketahui $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ di mana $x_1=x_2=\ldots=x_n$. Perlihat-kanlah bahwa merupakan subruang dari R^n.
12. Perlihatkanlah bahwa himpunan vektor berbentuk (*a*, *1*, *b*, *0*) merupakan subruang di R^4.
13. Buktikan bahwa semua matriks simetris berukuran 2 x 2 merupakan subruang M_{2x2}.
14. Diketahui *W* adalah himpunan semua polinom berbentuk:
    $W=\{(a+bx+cx^2+dx^3+ex^4) | a+b+c+d+e=0\}$.
    Tunjukkan bahwa *W* merupakan subruang dari P^4.
15. Misalkan *V* adalah himpunan fungsi real. Dengan menggunakan Teorema 5.11, perlihatkanlah bahwa *W* merupakan subruang *V* jika:
    (a) $W=\{f\in V | f(0)=1\}$
    (b) $W=\{f\in V | f(0)=0\}$
    (c) $W=\{f\in V | f(x)>0,\ \forall x\in R\}$
    (d) $W=\{f\in V | f(-x)=-f(x),\ \forall x\in R\}$
16. Diketahui $\vec{u}=(1,2,1)$ *dan* $\vec{v}=(0,1,-1)$. Manakah dari vektor-vektor berikut ini yang merupakan kombinasi linier dari $\vec{u}$ dan $\vec{v}$?
    (a) (1, 3, 1)
    (b) (2, 7, -1)
    (c) (5, 6, 7)
    (d) (-3, -7, -2)
17. Misalkan $\vec{u}_1=(1,3,2)$, $\vec{u}_2=(2,1,-1)$, dan $\vec{u}_3=(3,-1,-2)$. Nyatakanlah vektor-vektor di bawah ini sebagai kombinasi linier dari $\vec{u}_1,\vec{u}_2$ dan $\vec{u}_3$.
    (a) (10, 0, -4)
    (b) (-3, 1, 0)
    (c) (-9, -2, 1)
    (d) (-12, 4, 12)

18. Diketahui $P_1 = 1 + x$, $P_2 = 1 - x^2$ dan $P_3 = 2x + 3x^2$. Perlihatkanlah bahwa polinom-polinom berikut merupakan kombinasi linier dari P_1, P_2 dan P_3?
    (a) $P_4 = 6 - 4x - 7x^2$ (c) $P_4 = 1 - x + x^2$
    (b) $P_4 = 5 + x - 6x^2$ (d) $P_4 = 2 + 3x - 5x^2$
19. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} -4 & -7 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$. Perlihatkan $C = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -7 & 9 \end{bmatrix}$ bahwa merupakan kombinasi linier dari A dan B.
20. Manakah dari vektor-vektor berikut ini yang merentang R^3.
    (a) $\vec{u} = (1,2,3)$, $\vec{v} = (3,1,1)$, $\vec{w} = (2,-1,-2)$
    (b) $\vec{u} = (-1,2,4)$, $\vec{v} = (3,-2,3)$, $\vec{w} = (2,1,2)$
    (c) $\vec{u} = (2,1,-1)$, $\vec{v} = (3,-4,-2)$, $\vec{w} = (4,1,3)$, $\vec{x} = (2,-1,-3)$
21. Perlihatkan bahwa polinom-polinom berikut merentang P^2.
    (a) $p_1 = 2 + x - x^2$, $p_2 = 1 - 2x + 2x^2$, $p_3 = -3 - x + x^2$
    (b) $f = 3 - 2x + 2x^2$, $g = 2 + 3x - x^2$, $h = 1 + 4x - 5x^2$
22. Misalkan $S = \{A, B, C, D\}$. Perlihatkan bahwa masing-masing dari himpunan S di bawah ini merentang M_{2x2}.
    (a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$
    (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

5.3 BEBAS LINIER, BASIS DAN DIMENSI

5.3.1 Bebas Linier

Pada bagian ini akan kita bahas mengenai bebas linier dan tidak bebas linier (bergantung linier). Berikut ini diberikan definisinya.

Definisi 5.14 *Himpunan vektor $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ dikatakan **bebas linier** (linear independent), jika persamaan vektor:*

$$k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \ldots + k_n\vec{v}_n = \vec{0} \tag{5.25}$$

mempunyai penyelesaian $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$. Jika mempunyai penyelesaian lain, maka S dikatakan tidak bebas linier (linear dependent).

Contoh 5.19. Misalkan himpunan vektor $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ di mana $\vec{v}_1 = (3,2,1,-2)$, $\vec{v}_2 = (1,-2,4,-1)$, dan $\vec{v}_3 = \{-2,4,-8,2\}$. Dengan menggunakan persamaan (5.25) kita punyai:

$$k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + k_3\vec{v}_3 = \vec{0}$$

Dengan menuangkan bentuk vektor ke dalam matriks, diperoleh:

$$k_1\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} + k_3\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -8 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

akan terdapat empat buah persamaan, yaitu:

$$\begin{aligned} 3k_1 + k_2 - 2k_3 &= 0 \\ 2k_1 - 2k_2 + 4k_3 &= 0 \\ k_1 + 4k_2 - 8k_3 &= 0 \\ -2k_1 - k_2 + 2k_3 &= 0 \end{aligned}$$

Dengan menyelesaikan sistem persamaan ini (gunakan eliminasi Gauss-Jordan), diperoleh $k^1 = 0$, $k_2 = 2k_3$. Himpunan penyelesaian ini adalah tak trivial. Misalkan $k_3 = t$, maka penyelesaiannya adalah:

$$k_1 = 0, k_2 = 2t, k_3 = t$$

Karena penyelesaiannya bukan $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, dari Definisi 5.15 dapat disimpulkan bahwa S tidak bebas linier di R^3. □

Dari Contoh 5.19, dapat diambil sebuah kesimpulan seperti yang tertuang dalam teorema berikut.

Teorema 5.15 *Misalkan $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r\}$ adalah himpunan vektor di R^n. Jika $r > n$, maka S tak bebas linier.*

Bukti. Misalkan vektor-vektor dalam S adalah:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= (v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{1n}) \\ \vec{v}_2 &= (v_{21}, v_{22}, \ldots, v_{2n}) \\ &\vdots \\ \vec{v}_r &= (v_{r1}, v_{r2}, \ldots, v_{rn}) \end{aligned}$$

Dengan menggunakan persamaan (5.25), kita punyai:

$$k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \ldots + k_r\vec{v}_r = \vec{0}$$

Dengan menuangkan persamaan vektor tersebut ke dalam bentuk matriks, yakni:

$$k_1\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ \vdots \\ v_{1n} \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ \vdots \\ v_{2n} \end{bmatrix} + \ldots + k_r\begin{bmatrix} v_{r1} \\ v_{r2} \\ \vdots \\ v_{rn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

akan terdapat *r* buah persamaan, yaitu:

$$v_{11}k_1 + v_{21}k_2 + \ldots + v_{r1}k_r = 0$$
$$v_{12}k_1 + v_{22}k_2 + \ldots + v_{r2}k_r = 0$$
$$\vdots$$
$$v_{1n}k_1 + v_{2n}k_2 + \ldots + v_{rn}k_r = 0$$

Persamaan-persamaan ini merupakan sistem persamaan linier homogen. Teorema 2.5 menjamin bahwa sistem persamaan tersebut mempunyai tak hingga banyaknya penyelesaian (tak trivial), sehingga penyelesaiannya tidak tunggal ($k_1 = k_2 = \ldots = k_r = 0$). Oleh karena itu, dengan Definisi 5.14 dapat disimpulkan bahwa *S* tidak bebas linier. ■

Contoh 5.20. Dari vektor-vektor pada Contoh 5.17, yakni:

$$\vec{v}_1 = (2,1,-4), \vec{v}_2 = (-2,1,3), \text{ dan } \vec{v}_3 = (1,3,2)$$

Dengan menggunakan persamaan (5.25), kita punyai:

$$k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + k_3\vec{v}_3 = \vec{0}.$$

Sehingga dengan menuangkan bentuk vektor ke dalam matriks, kita peroleh tiga buah persamaan, yakni:

$$2k_1 - 2k_2 + k_3 = 0$$
$$k_1 + k_2 + 3k_3 = 0$$
$$-4k_1 + 3k_2 + 2k_3 = 0$$

Dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan diperoleh $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. Oleh karena itu, himpunan $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ adalah bebas linier pada R^3. □

Teorema berikut ini memberikan dua buah sifat sederhana dari kebebasan linier. Buktinya diberikan kepada pembaca sebagai latihan.

Teorema 5.16

(i) Jika sebuah himpunan mengandung vektor nol, maka himpunan itu tak bebas linier.

(ii) Sebuah himpunan yang mempunyai persis dua vektor tak bebas linier jika dan hanya jika salah satu dari vektor itu adalah kelipatan dari vektor lainnya.

Contoh 5.21 Polinom-polinom $p_1 = 1 + 2x - 3x^2$, $p_2 = 2 - 3x^2 + x^2$, dan $p_3 = 2 + 4x - 6x^2$ adalah tak bebas linier pada p_2. Hal ini disebabkan polinom $p_3 = 2p_1$ (Teorema 5.16 (ii)).

5.3.2 Basis dan Dimensi

Pada bagian ini akan kita bahas mengenai basis dan dimensi. Berikut ini diberikan definisinya.

Definisi 5.17 *Jika V adalah ruang vektor dan* $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r\}$ *adalah suatu himpunan berhingga dari vektor-vektor pada V, maka S disebut sebagai basis untuk V jika dua syarat berikut ini terpenuhi.*

(i) S bebas linier

(ii) S merentang V

Contoh 5.22 Diberikan himpunan $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ di mana $\vec{e}_1 = (1,0,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1,0)$ dan $\vec{e}_4 = (0,0,0,1)$. Akan diperlihatkan bahwa *S* bebas linier pada R^4. Dengan menggunakan persamaan (5.25) kita punyai:

$$k_1\vec{e}_1 + k_2\vec{e}_2 + k_3\vec{e}_3 + k_4\vec{e}_4 = \vec{0}$$

Penyelesaian persamaan ini adalah $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$ (buktikan). Sehingga S bebas linier. Selanjutnya dari Contoh 5.18 telah diperlihatkan bahwa S merentang R^4. Oleh karena itu, *S* adalah sebuah basis untuk ruang vektor R^4. Basis $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ adalah basis baku untuk R^4. □

Dari Contoh 5.22, kita dapat memperluas himpunannya. Jika $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ di mana $\vec{e}_1 = (1,0,0,\ldots,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0,\ldots,0)$ dan $\vec{e}_n = (0,0,0,\ldots,1)$ maka *S* adalah basis baku untuk R^n.

Contoh 5.23 Misalkan $\vec{v}_1 = 1,2,-3$, $\vec{v}_2 = (3,-1,4)$, $\vec{v}_3 = (-4,-2,1)$. Akan diperlihatkan bahwa $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ merupakan basis dari R^3. Kita tulis kombinasi linier.

$$\vec{v} = k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + k_3\vec{v}_3$$

dengan $\vec{v} = (a,b,c) \in R^3$. Persamaan tersebut membentuk tiga buah persamaan, yakni:

$$k_1 + 3k_2 - 4k_3 = a$$
$$2k_1 - k_2 - 2k_3 = b$$
$$-3k_1 + 4k_2 + k_3 = c$$

Karena matriks koefisiennya memiliki determinan yang tidak sama dengan nol, maka sistem persamaan linier tersebut konsisten untuk setiap nilai *a*, *b*, dan *c*. Sehingga *S* merentang (membangun) R^3.
Selanjutnya, akan diperlihatkan bahwa *S* bebas linier. Jika nilai $a = b = c = 0$, maka sistem persamaan liniernya menjadi:

$$k_1 + 3k_2 - 4k_3 = 0$$
$$2k_1 - k_2 - 2k_3 = 0$$
$$-3k_1 + 4k_2 + k_3 = 0$$

Dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan, diperoleh nilai $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

Oleh karena itu, S bebas linier. Dan kita simpulkan bahwa S adalah sebuah basis dari R^5. □

Contoh 5.24 Himpunan $S = \{1, x, x^2\}$ merupakan basis dari P_2. Kita harus memperlihatkan bahwa S merentang P_2 dan bebas linier. Misalkan untuk setiap P_2 dapat dituliskan sebagai $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$. Bentuk kombinasi liniernya adalah:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = k_1(1,0,0) + k_2(0,x,0) + k_3(0,0,x^2).$$

Sehingga $k_1 = a_0$, $k_2 = a_2$, $k_3 = a_3$ yang untuk semua skalar a_0, a_1 dan a_2. Oleh karena itu, S merentang P_2.

Selanjutnya, ambil $a_0 = a_1 = a_2 = 0$. Ini mengakibatkan $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, $k_3 = 0$. Oleh karena itu, S bebas linier. Dan dapat kita simpulkan bahwa S adalah basis dari P_2. Himpunan $S=\{1, x, x^2\}$ disebut sebagai basis baku bagi P_2. □

Dari Contoh 5.24, kita dapat memperluas himpunan S yakni $S = \{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n\}$ merupakan basis baku bagi P^n. Untuk matriks berukuran 2 x 2 atau $M_{2\times 2}$, himpunan:

$$\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$$

merupakan basis baku bagi ruang M_{2x2}.

Definisi 5.18 *Sebuah ruang vektor tak nol V disebut berdimensi berhingga jika V mengandung sebuah himpunan berhingga $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \supset, \vec{v}_n\}$ yang membentuk sebuah basis. Jika tidak demikian, maka V disebut berdimensi tak hingga. Di samping itu, kita mendefinisikan ruang vektor nol berdimensi berhingga.*

Definisi 5.19 *Dimensi dari sebuah ruang vektor berdimensi berhingga V, yang dinyatakan dengan dim(V), didefinisikan sebagai banyaknya vektor di dalam suatu basis V. Di samping itu, kita mendefinisikan ruang vektor nol mempunyai dimensi nol.*

Dari contoh 5.22, himpunan $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ merupakan basis baku bagi R^4. Karena banyaknya vektor pada himpunan S adalah 4, maka $dim(S) = dim(R^4) = 4$. Jika diperluas yakni $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$, maka $dim(S) = dim(R^n) = n$. Selanjutnya untuk polinom P_n. Himpunan $S = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ merupakan basis baku bagi P_n. Karena banyak unsur-unsur di S adalah $n + 1$, maka $dim(S) = dim(P_n) = n + 1$. Lebih lanjut, untuk matriks berukuran 2 x 2 atau M_{2x2}, $dim(M_{2x2}) = 4$, karena himpunan $\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$ merupakan basis baku bagi M_{2x2}. Ruang-ruang ini berdimensi berhingga.

Contoh 5.25 Ruang-ruang vektor $F(-\infty,\infty)$, $C(-\infty,\infty)$, $C^m(-\infty,\infty)$, dan $C^\infty(-\infty,\infty)$ berdimensi tak hingga. □

Contoh 5.26 Tentukan basis dan dimensi dari ruang vektor

$$V = \left\{\begin{bmatrix} s \\ s-t \\ t \end{bmatrix}\right\}.$$

Himpunan V dapat diuraikan menjadi:

$$\begin{bmatrix} s \\ s-t \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix} = s\vec{v}_1 + t\vec{v}_2$$

Untuk semua skalar s,t, himpunan $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ merentang V. Ambil $s = 0$, dan $t = 0$, sehingga B bebas linier. Oleh karena itu, B merupakan basis bagi V dan $dim(V) = 2$.

Teorema berikut ini memberikan dua syarat penting bagi penentuan basis dan dimensi dari subruang dan dinamakan sebagai **Teorema Himpunan Perentang.**

Teorema 5.20. *Misalkan $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ adalah himpunan di ruang vektor V dan misalkan H direntangkan oleh $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ atau ditulis dengan $H = span\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$.*

(i) Jika salah satu vektor di S katakan $\vec{v}_k$ merupakan kombinasi linier dari vektor-vektor yang tersisa di S, maka himpunan yang terbentuk dari S dengan membuang $\vec{v}_k$ masih merentang H.

(ii) Jika $H \neq \{0\}$, maka beberapa subhimpunan dari S merupakan basis bagi H.

Bukti. (i) Dengan menata ulang daftar dari vektor-vektor di S (jika perlu), kita andaikan bahwa $\vec{v}_p$ merupakan kombinasi linier dari $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{p-1}$, yakni:

$$\vec{v}_p = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \ldots + a_{p-1}\vec{v}_{p-1} \tag{5.25}$$

Misalkan beberapa vektor dapat dituliskan sebagai:

$$\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \ldots + c_{p-1}\vec{v}_{p-1} + c_p\vec{v}_p \tag{5.26}$$

untuk sembarang skalar c_1, c_2, ..., c_p. Dengan mensubsitusikan (5.25) ke dalam (5.26), kita dapat mengatakan bahwa $\vec{x}$ merupakan kombinasi linier dari $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{p-1}$. Oleh sebab itu, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{p-1}\}$ merentang H.

(ii) Jika himpunan perentang $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ adalah bebas linier, maka sudah tentu S merupakan basis bagi H. Sebaliknya, satu dari vektor-vektor di S bergantung dengan vektor-vektor lainnya dan dapat dihilangkan dengan bagian (i). Hal ini dapat dilakukan, asalkan terdapat dua vektor atau lebih di

S. Lakukan proses ini sampai himpunan perentang bebas linier dan menjadi basis bagi *H*. Jika himpunan perentang ini dikurangi hingga bersisa satu vektor, maka vektor ini tak nol (dan karena itu bebas linier) karena $H \neq \{0\}$. ■

Contoh 5.27 Dari Contoh 5.26, diperoleh:

$$\vec{v}_1 = (1,1,0) \text{ dan } \vec{v}_2 = (0,-1,1)$$

Vektor $\vec{v}_1$ bukan merupakan kelipatan $\vec{v}_2$, sehingga $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ bebas linier (lihat Teorema 5.16 (ii)). Dari Teorema 5.20, $B \neq \{0\}$ dan $\vec{v}_1$ bukan merupakan kombinasi linier dari $\vec{v}_2$. Oleh karena itu, B merupakan basis bagi *V*. □

Contoh 5.28 Misalkan *V* adalah ruang vektor yang direntangkan oleh vektor-vektor $\vec{v}_1 = (2, -4, 5)$, $\vec{v}_2 = (3, 1, -2)$, dan $\vec{v}_3 = (-1, 9, -12)$. Tentukanlah basis dimensi dari *V*.

Untuk menentukannya, kita lihat bahwa $\vec{v}_3$ merupakan kombinasi linier dari $\vec{v}_1$ dan $\vec{v}_2$, yakni

$$\vec{v}_3 = -2\vec{v}_1 + \vec{v}_2.$$

Menurut Teorema Himpunan Perentang, hapuslah $\vec{v}_3$, dan:

$$span(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = span(\vec{v}_1, \vec{v}_2),$$

Sehingga $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ merentang *V*. Selanjutnya, kita lihat bahwa $\vec{v}_1$ bukan kelipatan $\vec{v}_2$ Teorema 5.16 (ii) menjamin bahwa $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ adalah bebas linier. Oleh karena itu, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ adalah suatu basis bagi *V* dan $dim(V) = 2$. □

Contoh 5.29 Diketahui bahwa *V* adalah subruang dari P_3 yang dibangun oleh $\{1+x^3, 1+x, x+x^2, x^2+x^3\}$. Tentukan dimensi *V*.

Ambil vektor-vektor koefisien dari $\{1+x^3, 1+x, x+x^2, x^2+x^3\}$, yakni:

$$\vec{v}_1 = (1,0,0,1), \vec{v}_2 = (1,1,0,0), \vec{v}_3 = (0,1,1,0), \text{ dan } \vec{v}_4 = (0,0,1,1)$$

Kita lihat bahwa $\vec{v}_4$ merupakan kombinasi linier dari $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, dan $\vec{v}_3$, yaitu:

$$\vec{v}_4 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3$$

Sehingga kita dapat menghapus $\vec{v}_4$ dan kita punyai himpunan:

$$B = span\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}.$$

Sekarang tidak satu pun vektor dari himpunan *B* yang merupakan kombinasi linier dari vektor-vektor lainnya. Sehingga $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ merentang *V*. Karena tidak satu pun vektor dari himpunan *B* yang merupakan perkalian skalar dari vektor lainnya, maka *B* bebas linier. Oleh karena itu, *B* adalah basis dari *V* dan $dim(V) = 3$. □

Misalkan suatu sistem persamaan linier homogen dapat dituliskan sebagai:

$$AX = 0$$

Solusi sistem persamaan linier homogen dapat berupa solusi trivial atau tak trivial. Bila solusinya tak trivial, maka solusinya dapat dinyatakan dengan parameter/variabel (lihat bagian 2.3). Himpunan solusi dengan parameter ini membentuk sebuah ruang vektor yang disebut dengan **ruang penyelesaian**.

Misalkan *A* adalah matriks yang berukuran *m x n*. Ruang penyelesaian dari sistem $AX = 0$ berupa vektor-vektor yang merupakan subruang dari R^n dan disebut dengan ruang nol (*null space*) dari *A*. Basis untuk ruang nol dari *A* adalah p buah vektor solusi yang bebas linier dari sistem $AX = 0$. Dimensi dari ruang nol dari *A* disebut sebagai nullitas dari *A* dan ditulis dengan N_A. Teorema berikut ini dikenal dengan sebutan Teorema *Rank*-Nulitas.

Teorema 5.21 *Jika A berukuran m x n, maka rank(A)* + $N_A = n$.

Bukti. Misalkan *B* adalah bentuk eselon terduksi dari *A*. Sistem $AX = 0$ adalah ekuivalen dengan sistem $BX = 0$. Jika $rank(A) = r$, maka *B* mempunyai *r* baris yang tak nol. Ini mengakibatkan sistem $BX = 0$ mempunyai $n - r$ variabel bebas (parameter). Sehingga $N_A = n - r$. □

Dari bukti Teorema 5.21, dapat kita ambil dua hasil yang penting dalam penentuan *rank* dan nulitas, yakni:

(1) *rank*(A) = banyaknya baris tak nol dari bentuk eselon tereduksi.

(2) N_A = banyaknya parameter (variabel bebas) dalam penyelesaian sistem $AX = 0$.

Contoh 5.30 Tentukan basis, dimensi, dan *rank* dari ruang penyelesaian sistem persamaan linier homogen berikut:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 \quad &= 0 \\ 2x_1 \quad + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Dengan melakukan eliminasi Gauss-Jordan diperoleh bentuk eselon baris terduksi, yaitu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sistem persamaan yang bersesuaian dengan bentuk eselon baris tereduksi ini adalah:

$$x_1 = 0, x_2 + 2x_4 = 0, \text{ dan } x_3 - x_4 = 0$$

Dengan menetapkan variabel bebas $x_4 = s$, diperoleh solusinya yakni:

$$x_1 = 0,\ x_2 = -2s, x_3 = s, \text{ dan } x_4 = s$$

Dalam bentuk vektor, solusinya adalah:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -2s \\ s \\ s \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Basis dari ruang nolnya adalah $S = \{(0, -2, 1, 1)\}$. Jelaslah bahwa S ada-lah bebas linier. Dimensinya (nulitas) adalah $N_A = 1$. Pada bentuk eselon baris tereduksinya, terdapat 3 baris tak nol, sehingga *rank*-nya adalah 3. Oleh karena itu, *rank* + nulitas = 3 + 1 = 4. □

LATIHAN 5.3

1. Manakah dari sekumpulan vektor berikut ini yang bebas linier?
   (a) (3, -1,3), (2, 0, 1), (4, 6, 2)
   (b) (1, 3, 0, 2), (2, 4, 1, -3), (0, 5, 2, 1), (3, 1, 4, 1)
   (c) (2, 1, 5, 3), (4, 1, 0, 5), (-2, 0, 5, -2), (3, 4, -2, 1)
   (d) (6, -2, 3, 2), (-1, 3, 7, -4), (2, -1, 7, 5), (4, 3, 2, -6)
2. Apakah himpunan matriks di bawah ini bebas linier atau bergantung linier? Berikan buktinya. Apabila bergantung linier, nyatakanlah salah satu matriks dari himpunan tersebut merupakan kombinasi linier dari matriks yang lain.
   (a) $A = \left\{\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}\right\}$
   (b) $B = \left\{\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$
   (b) $C = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right\}$
3. Tunjukkan bahwa himpunan $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ adalah bebas linier, tetapi himpunan $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ tak bebas linier (bergantung linier).
   $$\vec{v}_1 = (1,1,1),\ \vec{v}_2 = (1,1,0),\ \vec{v}_3 = (1,0,0),\ \vec{v}_4 = (-2,-3,-4)$$
4. Manakah dari himpunan polinomial berikut yang bebas linier?
   (a) $2x, x^2, 2 + x + 3x^2$ di P_2
   (b) $4 - x, 1 + x - 2x^2, 5 - 2x^2$ di P_2
   (c) $2 - x + 3x^2, 1 + 3x + 2x^2, 3 + 2x + 4x^2$ di P_2
5. Buktikan bahwa jika $a = 0$ atau $c = 0$ atau $f = 0$, atau $j = 0$, kolom-kolom dari matriks A berikut adalah tak bebas linier.
   $$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ g & h & f & 0 \\ g & h & i & j \end{bmatrix}$$
6. Jika $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ adalah himpunan vektor yang bergantung linier pada ruang vektor V, perlihatkanlah bahwa $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5\}$ juga bergantung linier di mana $\vec{v}_5$ merupakan sembarang vektor lain di dalam V.
7. Perlihatkan bahwa {sin t, cos t} adalah bebas linier, di mana t berada dalam interval [0,1].
8. Perlihatkanlah bahwa {sin t, cos t, $2t$} adalah bergantung linier untuk $-2\pi \leqslant t \leqslant 2\pi$.
9. Jika $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ adalah himpunan vektor-vektor bebas linier, perlihatkanlah bahwa masing-masing subhimpunan S dengan satu atau lebih vektor juga bebas linier.
10. Manakah dari himpunan vektor berikut yang merupakan basis untuk R^3?
    (a) (1, 3, 2), (4, −2, 1), (−2, 8, 3)
    (b) (−2, −4, 6), (-1,-5, 2), (3, 1, −1)
    (c) (2, 1, −5), (7, 2, −6), (−1, 1, 21)
    (d) (4, 2, −5), (0, 1, −4), (3, 5, 3)
11. Manakah yang merupakan basis untuk P_2?
    (a) $1 + x, 2 - 2x + x^2, 1-3x + x^2$
    (b) $4 - 2x + 5x^2, x - 4x^2, 1 + 5x - 2x^2$
    (c) $2 + 3x - 3x^2, 1 - 2x + 4x^2, 2 - 4x + 8x^2$
    (d) $-3 - x + 4x^2, 1 + 2x + 3x^2, 2 + 4x - x^2$
12. Manakah dari himpunan matriks berikut merupakan basis untuk M_{2x2}?
    (a) $A = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}\right\}$
    (b) $B = \left\{\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}\right\}$
13. Tentukan basis dan dimensi dari ruang yang direntangkan oleh himpunan:
    (a) S = {(1, −2, 3), (2, 1, 4), (3, 2, 1)}
    (b) S = {(2, 4, −1), (3, 2, 5), (4, 8, −2)}
    (c) S = {(1, 4, 4), (2, 1, 2), (6, 3, 5), (3, −2, −1)}
    (d) S = {(3, −3, 1, 4), (4, 1, −2, 3), (5, 3, 1, 2), (2, −7, 4, 5)}
14. Diketahui V adalah subruang dari P_3 yang dibangun oleh $\{x^3 + x^2, x^3 + x, x + 1, x^2 + 1\}$. Tentukanlah dimensi V.
15. Tentukan basis, dimensi, dan *rank* untuk ruang penyelesaian dari sistem persamaan linier homogen berikut.
    (a) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 - 5x_2 - 2x_2 = 0 \end{cases}$
    (b) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -3x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$
    (c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 5x_1 - 2x_2 - \ x_3 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 - \ x_3 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$

16. Misalkan V adalah ruang yang direntangkan oleh $\vec{v}_1 = -\sin^2 t$, $\vec{v}_2 = \cos^2 t$, dan $\vec{v}_3 = \cos^2 t$.
    (a) Buktikan bahwa $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ bukan merupakan basis untuk V.
    (b) Carilah basis untuk V.
17. Misalkan $R^3 = span(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$. Berikan pendapat Anda mengapa $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ merupakan basis untuk R^3.
18. Misalkan $\alpha = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ adalah bebas linier pada R^n. Berikan penjelasan mengapa α harus menjadi basis untuk R^n.
19. Misalkan $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ adalah basis untuk ruang vektor V. Perlihatkan bahwa $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ adalah juga sebuah basis, di mana $u_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, $u_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_3$, $u_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$
20. Tentukanlah dimensi dari subruang P_2 yang terdiri dari semua polynomial $a_0 + a_0 x + a_2 x^2$ di mana $a_0 = 0$.
21. Untuk ruang-ruang vektor M dan N sedemikian sehingga $M \subseteq N$, pernyataan berikut ini adalah benar.
    (a) $dim(M) \leqslant dim(N)$
    (b) jika $dim(M) = dim(N)$, maka $M = N$

5.4 RUANG VEKTOR DENGAN MATLAB

Pada bagian ini akan dijelaskan tentang penggunaan Matlab untuk komputasi pada ruang dimensi dua dan tiga, bebas linier, serta basis dan dimensi. Masing-masing dijelaskan sebagai berikut.

5.4.1 Ruang Dimensi Dua dan Tiga

Pada bagian ini, pertama sekali akan dijelaskan tentang operasi penjumlahan dan pengurangan dua buah vektor. Sebuah vektor $\vec{a} = (2,3)$ dapat dituliskan dalam bentuk matriks baris baris ataupun matriks kolom. Perhatikan contoh berikut.

Contoh 5.31 Misalkan vektor $\vec{a} = (2,3,-1)$. Pada Matlab, vektor $\vec{a}$ ditulis sebagai matriks baris:

```
>> a=[2 3 -1]
a =
     2     3    -1
```

atau dapat ditulis sebagai matriks kolom


```
>> a=[2 ; 3 ; -1]
a =
     2
     3
    -1
```

□

Untuk penjumlahan dan pengurangan dua buah vektor, operasi yang digunakan masing-masing adalah " + " dan " - ". Untuk perkalian vektor $\vec{a}$ dengan skalar k, perintah yang digunakan adalah "k*a", bila a merupakan $\vec{a}$. Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh berikut.

Contoh 5.32 Misalkan kita telah menginput dua buah vektor a dan b yakni:

```
>> a=[3 1 4];
>> b=[2 -1 -7];
```

Penjumlahan $a + b$ adalah

```
>> a+b
ans =
     5     0    -3
```

Pengurangan $a - b$ adalah

```
>> a-b
ans =
     1     2    11
```

Perkalian $2a$ adalah

```
>> 2*a
ans =
     6     2     8
```

Hasil dari $-3a-2b$ adalah

```
>> -3*a-2*b
ans =
   -13    -1     2
```

□

Catatan: Untuk penjumlahan dan perkalian dua buah vektor, dimensi dari kedua vektor tersebut haruslah sama. Contoh 5.32 dapat diperluas untuk vektor-vektor yang dimensinya lebih dari 3.

Bagaimana untuk perkalian dot (titik) dari dua buah vektor? Pada bentuk (5.21), telah kita ketahui bahwa perkalian dot dari dua buah vektor a dan b yang sama dimensinya disimbolkan sebagai $a.b$ atau $\langle a,b \rangle$. Pada Matlab, setelah kita menginput vektor a dan b lakukan perintah "diag(a'*b)' ". Agar pembaca dapat lebih memahaminya, perhatikan contoh berikut.

Contoh 5.33 Dari vektor-vektor pada Contoh 5.32, perkalian dot $a.b$ adalah

```
>> a=[2 3 -1];
>> b=[2 -1 -7];
>> a_dot_b=diag(a'*b)'
a_dot_b =
     4    -3     7
```

□

Misalkan kita akan mencari norma (panjang) dari vektor a, gunakanlah perintah "*norm(a)*". Untuk mencari jarak antara dua buah vektor *a* dan *b*, gunakanlah perintah "*norm(a-b)*". Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh berikut ini.

Contoh 5.34 Dari vektor pada Contoh 5.4, yakni:

```
>> P=[-1 2 -3];
>> Q=[2 4 3];
```

Norma dari vektor P dan Q adalah:

```
>> norm(P)
ans =
    3.7417
>> norm(Q)
ans =
    5.3852
```

Jarak antara vektor *P* dan vektor *Q* adalah:

```
>> jarak=norm(P-Q)
jarak =
    7
```

□

Bagaimana pula untuk menentukan jarak antara sebuah titik dengan sebuah garis lurus? Untuk menentukannya, kita gunakan *source code program* di bawah ini. *Source code program* ini merupakan bahasa pemrograman Matlab berdasarkan bentuk (5.17) dan (5.18) pada bagian 5.1.2. Simpan program dengan nama "jarak.m". Pada *source kode program* terdapat perintah "abs()" yang merupakan perintah untuk mencari nilai absolut (mutlak).

```
function [jarak]=distance(titik,pers_garis)
% input titik dengan matriks
% misal: titik P(4,1)
% >>P=[4 1]
% input pers_garis dengan matriks
% misal : 2x+3y+2=0
% >>Q=[2 3 2]
% run program dengan " jarak(P,Q) "
[m,n]=size(pers_garis);
pembilang=abs(titik*pers_garis(m,1:n-1)'+pers_garis(m,n));
penyebut=norm(titik);
jarak=pembilang/penyebut;
```

Contoh 5.35 dan 5.36 berikut ini masing-masing merupakan contoh menentukan jarak antara sebuah titik dan sebuah garis lurus pada ruang dimensi dua dan tiga.

Contoh 5.35 Tentukan jarak antara titik $P(-3,-4)$ dan garis $2x + 3y - 4 = 0$. Pertama sekali, input matriks *P* sebagai titik dan matriks *Q* seba-gai persamaan garis.

```
>> P=[-3 -4];
```



```
>> Q=[2 3 -4];
```

Kemudian kita tentukan jarak *P* dan *Q* dengan perintah:

```
>> jarak(P,Q)
ans =
    4.4000
```

□

Contoh 5.36 Tentukan jarak antara titik P(-2, 3, -6) dengan bidang $2x-3y+4z+2=0$. Input titik dan persamaan bidang yakni:

```
>> P=[-2 3 -6];
>> Q=[2 -3 4 2];
```

Jarak antara P dan Q adalah

```
>> jarak(P,Q)
ans =
    5
```

□

5.4.2 Bebas Linier

Sebuah himpunan vektor dikatakan bebas linier apabila sistem (5.25) pada Definisi 5.14 mempunyai solusi trivial. Dapat kita lihat bahwa sistem (5.25) merupakan sistem persamaan linier homogen. Oleh karena itu, kita dapat mengecek apakah himpunan bebas linier atau bergantung linier dengan perintah " *rref(A)* " jika *A* merupakan matriks koefiennya atau merupakan matriks hasil penggabungan vektor-vektornya. Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh berikut.

Contoh 5.37 Dari himpunan vektor pada Contoh 5.19, matriks dari vektornya masing-masing adalah:

```
>> v1=[3 ; 2 ; 1 ; -2];
>> v2=[1 ; -2 ; 4 ; -1];
>> v3=[-2 ; 4 ; -8 ; 2];
```

Gabungan dari vektor-vektornya adalah:

```
>> A=[v1 v2 v3]
A =
    3    1   -2
    2   -2    4
    1    4   -8
   -2   -1    2
```

Bentuk eselon baris tereduksinya adalah:

```
>> rref(A)
ans =
    1    0    0
    0    1   -2
    0    0    0
    0    0    0
```

Pada bentuk eselon baris tereduksinya terdapat dua buah baris yang entrinya tidak semuanya nol. Sehingga kita dapat mengatakan bahwa solusinya adalah tak trivial. Oleh karena itu, himpunan vektor ini adalah bergantung linier. □

Contoh 5.38 Dari himpunan vektor pada Contoh 5.17, matriks dari vektornya masing-masing adalah:

```
>> v1=[2 ; 1 ; -4];
>> v2=[-2 ; 1 ; 3];
>> v3=[1 ; 3 ; 2];
```

Gabungan dari vektor-vektornya dan bentuk eselon baris tereduksinya adalah:

```
>> A=[v1 v2 v3];
>> rref(A)
ans =
    1    0    0
    0    1    0
    0    0    1
```

Dari bentuk eselon baris tereduksinya dapat kita katakan bahwa solusinya adalah trivial. Oleh karena itu, himpunan vektor ini adalah bebas linier. □

5.4.3 Basis dan Dimensi

Untuk menentukan apakah sebuah himpunan merupakan basis untuk ruang vektornya haruslah memenuhi dua syarat yang terdapat pada Definisi 5.17. Untuk memudahkan penentuannya, Wayne King memberikan sebuah *source code program* untuk komputasinya. *Source code program*-nya di publikasikan dalam www.mathwork.com. Berikut ini adalah *source code program* yang dibuat olehnya dengan penambahan function. Simpanlah *source kode program* ini dengan nama "basicol.m".

```
function [basis]=basiscolumn(A)
% Nama pragram " basicol.m "
% input matriks A yang berasal dari himpunan vektor
% run program dengan " [basis]=basicol(A) "
% Wayne King - 12/5/2013
B = A';
[R,basiccol] = rref(B);
B = B(basiccol,:)'; %modifikasi-awalnya B = B(:,basiccol)';
basis=B;  % tambahan agar sesuai dengan function
```

Contoh 5.39 Dari himpunan vektor pada Contoh 5.23, matriks vektornya adalah:

```
>> v1=[1; 2; -3];
>> v2=[3; -1; 4];
>> v3=[-4; -2; 1];
```


Gabungan dari vektor-vektornya adalah:

```
>> A=[v1 v2 v3];
A =
    1    3   -4
    2   -1   -2
   -3    4    1
```

Basis untuk R^3 adalah:

```
>> [basis]=basicol(A)
basis =
    1    3   -4
    2   -1   -2
   -3    4    1
```

□

Pada Contoh 5.39, dapat kita lihat bahwa keseluruhan vektornya merupakan basis untuk R^3. Lalu bagaimana untuk penentuan dimensinya? Untuk menentukan dimensinya cukup kita tentukan banyaknya kolom pada matriks basis. Hal ini sesuai dengan Definisi 5.19 yang mengatakan bahwa dimensi merupakan banyaknya vektor di dalam suatu basis. Agar pembaca dapat memahaminya, perhatikanlah contoh berikut.

Contoh 5.40 Dari perolehan basis pada Contoh 5.39, perintah untuk menentukan dimensinya yakni:

```
>> [m,n]=size(basis);
>> dimensi=n
dimensi =
    3
```

Oleh karena itu, himpunan vektor tersebut berdimensi tiga. □

Contoh 5.41 Dari Contoh 5.28, akan dicari basis dan dimensinya. Pertama, kita input vektor-vektornya, yakni:

```
>> v1=[2; -4; 5];
>> v2=[3; 1; -2];
>> v3=[-1; 9; -12];
```

Gabungan dari vektor-vektornya dan basisnya masing-masing adalah:

```
>> A=[v1 v2 v3];
>> [basis]=basicol(A)
basis =
    2    3
   -4    1
    5   -2
```

Kemudian dimensi dari himpunan vektor tersebut adalah:

```
>> [m,n]=size(basis);
>> dimensi=n
```

```
dimensi =
     2
```

□

Bagaimana pula untuk menentukan nulitas dari suatu ruang penyelesaian? Untuk menentukan nulitas, kita berpatokan pada Teorema 5.21. Sehingga pertama sekali kita harus mencari *rank* dari suatu matriks koefisien. Lalu kita gunakan formula "**rank + nulitas = n**", di mana **n** merupakan banyaknya kolom. Untuk lebih jelasnya, perhatikanlah contoh berikut ini.

Contoh 5.42 Tentukan *rank* dan nulitas dari sistem persamaan linier homogen pada Contoh 5.30. Sistem persamaan linier homogennya adalah:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 \quad &= 0 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Pertama, input matriks koefisiennya.

```
>> A=[1 1 1 1 ; 0 1 2 0 ; 2 0 1 -1];
```

Kemudian carilah *rank* dari matriks *A*.

```
>> rank(A)
ans =
     3
```

Setelah itu, kita cari nulitasnya dengan perintah.

```
>> [m,n]=size(A);
>> nulitas=n-rank(A)
nulitas =
     1
```

□

LATIHAN 5.4

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan menggunakan Matlab.

1. Buatlah tiga buah vektor $\vec{u}, \vec{v}$, dan $\vec{w}$ di mana $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in R^{10}$. Kemudian tentukanlah:
   (a) $\vec{u} + \vec{w}$
   (b) $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$
   (c) $2\vec{u} - 3\vec{w}$
   (d) $\vec{u}.\vec{w}$
   (e) $\overrightarrow{uv}$
   (f) $\overrightarrow{uv}.\overrightarrow{wu}$
2. Dengan menggunakan vektor-vektor yang telah Anda buat pada soal nomor 1, hitunglah:
   (a) $norm(\vec{u})$
   (b) $norm(\vec{v}) - norm(\vec{w})$
   (c) $norm(\overrightarrow{uv})$
   (d) jarak antara $\vec{u}$ dan $\vec{v}$
   (e) jarak antara $\overrightarrow{uv}$ dan $\vec{w}$
   (f) jarak antara $\overrightarrow{wu}$ dan $2\vec{v}$
3. Hitunglah jarak antara titik dengan:
   (a) garis $2x - 3y + 5 = 0$
   (b) garis $-3x - 5y = -8$
   (c) garis $-2x = 2y - 8$
   (d) garis $3y = 5x + 7$
4. Hitunglah jarak antara titik $P(-1, 2, -6)$ dengan bidang:
   (a) $x - 2y + z - 9 = 0$
   (b) $-2x - 4y + 5z = -8$
   (c) $-x - 4y = z + 5$
   (d) $2z = x - 6y - 7$
5. Tentukan apakah himpunan vektor berikut ini bebas linier atau bergantung linier. Kemudian carilah basis dan dimensinya.
   (a) (3, – 1, 2), (2, 1, 4), (3, – 2, 0)
   (b) (1, 1, –1), (2, 1, –3), (3, 2, –4)
   (c) (–2, 4, 5), (3, 2, 1), (7, 1, –4), (2, 3, 0) >> A = [1 3 2; 4 –1 5; 7 1 8]
6. Carilah *rank* dan nulitas dari sistem persamaan berikut ini.

(a) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + \quad 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 \quad = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$

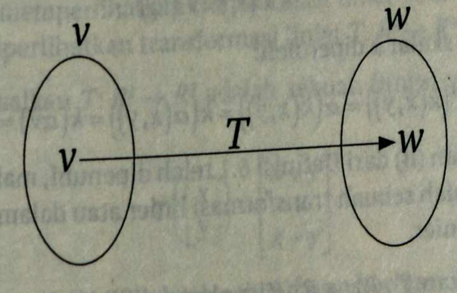
(b) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \\ 7x_1 + x_2 + 8x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$

TRANSFORMASI LINIER 6

Pada bab ini akan kita bahas mengenai transformasi linier, kernel dan jangkauan, transformasi linier R^n ke R^m, dan matriks transformasi linier. Masing-masing pokok pembicaraan dijelaskan sebagai berikut.

6.1 TRANSFORMASI LINIER

Misalkan terdapat dua buah himpunan tak kosong V dan W. Sebuah perintah T yang menghubungkan V ke W ditulis $T\colon V \to W$ adalah sebuah perintah yang menugaskan setiap $v \in V$ tepat satu ke $w \in W$. Perintah $T\colon V \to W$ dapat dilukiskan sebagai berikut.



GAMBAR 6.1 PEMETAAN DARI V KE W

Dari Gambar 6.1, himpunan V disebut sebagai domain dan himpunan W disebut sebagai kodomain. Sebuah perintah T yang menghubungkan V ke W disebut sebagai transformasi (operator atau pemetaan atau fungsi). Jika T menugaskan $v \in V$ ke $w \in W$ (Gambar 6.1) maka $w \in W$ disebut sebagai image (bayangan atau peta) dari $v \in V$ dan dinotasikan dengan $T(v) = w$. Dalam hal ini $v \in V$ merupakan pra-*image* (prabayangan atau prapeta) dari $w \in W$ oleh transformasi T.

Definisi 6.1 *Jika $T\colon V \to W$ adalah sebuah fungsi dari ruang vektor V ke ruang vektor W, maka F disebut sebagai transformasi linier apabila:*

(i) $T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$, *untuk semua* $\vec{u},\vec{v} \in V$.

(ii) $T(k\vec{u}) = kT(\vec{u})$, *untuk semua* $\vec{u} \in V$ *dan semua skalar k.*

Jika V = W, maka T disebut sebagai operator linier.

Definisi 6.2 *Misalkan V dan W adalah sembarang dua ruang vektor. Fungsi T: $V \to W$ yang memetakan $\vec{v} \in V$* ke $\vec{0} \in W$ atau $T(\vec{v}) = \vec{0}$ *disebut sebagai transformasi nol.*

Contoh 6.1 Misalkan $T: R^2 \to R^2$ adalah fungsi yang memetakan ruang R^2 ke dirinya sendiri. Akan diperlihatkan bahwa T adalah transformasi linier. Anggap vektor $\vec{v} = (x,y) \in R^2$ yang dipetakan ke vektor kolinier $\alpha\vec{v} = (\alpha x, \alpha y) \in R^2$ untuk sembarang skalar riil $\alpha \neq 0$ atau dituliskan sebagai:

$$T(\vec{v}) = \alpha\vec{v}.$$

Sehingga:

$$\begin{aligned} T(\vec{v}_1+\vec{v}_2) &= T\big((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\big) \\ &= \alpha\big((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\big) \\ &= \alpha(x_1,y_1)+\alpha(x_2,y_2) \\ &= T(\vec{v}_1)+T(\vec{v}_2) \end{aligned}$$

Untuk sembarang skalar k diperoleh:

$$T(k\vec{v}) = T(k(x,y)) = \alpha(k(x,y)) = k(\alpha(x,y)) = k(\alpha\vec{v}) = kT(\vec{v}).$$

Karena syarat (i) dan (ii) dari Definisi 6.1 telah dipenuhi, maka dapat kita katakan bahwa T adalah sebuah transformasi linier atau dalam hal ini T adalah sebuah operator linier. □

Contoh 6.2 Misalkan $T: R^2 \to R^2$. Kita akan selidiki bahwa:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y \\ -y \end{bmatrix}$$

merupakan operator linier.

Misalkan $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in R^2$ dimana $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ dan $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$. Sehingga:

$$\begin{aligned} T(\vec{v}_1+\vec{v}_2) &= T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) \\ &= T\left(\begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} x_1+x_2+y_1+y_2 \\ -(y_1+y_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1+y_1+x_2+y_2 \\ -y_1-y_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ -y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2+y_2 \\ -y_2 \end{bmatrix} \\ &= T(\vec{v}_1)+T(\vec{v}_2) \end{aligned}$$

dan untuk sembarang skalar riil k:

$$\begin{aligned} T(k\vec{v}_1) &= T\left(k\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\right) \\ &= T\left(\begin{bmatrix} kx_1 \\ ky_1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} kx_1+ky_1 \\ -ky_1 \end{bmatrix} \\ &= k\begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ -y_1 \end{bmatrix} \\ &= kT(\vec{v}_1) \end{aligned}$$

Karena kedua syarat pada Definisi 6.1 telah dipenuhi, maka dapat kita katakan bahwa T merupakan operator linier. □

Contoh 6.3 memperlihatkan transformasi linier $T: R^n \to R^m$, $n < m$, dan Contoh 6.4 memperlihatkan transformasi linier $T: R^n \to R^m$, $n > m$.

Contoh 6.3. Misalkan $T: R^2 \to R^3$ adalah sebuah fungsi yang didefinisikan oleh:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y \\ -x \\ x-y \end{bmatrix}$$

Akan diperlihatkan bahwa T adalah sebuah transformasi linier.

Ambil sembarang dua vektor $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in R^2$ di mana $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ dan $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$. Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} T(\vec{v}_1+\vec{v}_2) &= T\left(\begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} x_1+x_2+y_1+y_2 \\ -x_1-x_2 \\ x_1+x_2-y_1-y_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ -x_1 \\ x_1-y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2+y_2 \\ -x_2 \\ x_2-y_2 \end{bmatrix} \\ &= T(\vec{v}_1)+T(\vec{v}_2) \end{aligned}$$

dan untuk sembarang skalar riil k:

$$T(k\vec{v}_1) = T\left(\begin{bmatrix} kx_1 \\ ky_1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} k(x_1+y_1) \\ -kx_1 \\ k(x_1-y_1) \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ -x_1 \\ x_1-y_1 \end{bmatrix} = kT(\vec{v}_1)$$

Karena kedua syarat pada Definisi 6.1 telah dipenuhi, maka dapat kita katakan bahwa T merupakan transformasi linier. □

Misalkan A adalah matriks yang berukuran $m \times n$. Transformasi $T: R^n \to R^m$, dengan $\vec{x} \in R^n$, dapat dituliskan menjadi:

$$T(\vec{x}) = A\vec{x}.$$

Di sini $\vec{x}$ dituangkan ke dalam matriks berukuran $n \times 1$, dan $A\vec{x}$ merupakan matriks berukuran $m \times 1$. Dengan menganggap $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in R^n$, dan sembarang skalar riil k diperoleh:

$$T(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = A(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 + A\vec{x}_2 = T(\vec{x}_1) + T(\vec{x}_2)$$

dan:

$$T(k\vec{x}_1) = A(k\vec{x}_1) = k(A\vec{x}_1) = kT(\vec{x}_1)$$

Sehingga T linier dan T dinamakan transformasi matriks.

Teorema 6.3 *Jika $T: R^n \to R^m$ adalah transformasi linier dan $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ adalah basis baku untuk R^n, maka T adalah perkalian oleh A. Di mana A adalah matriks yang kolom-kolomnya merupakan $T(e_1), T(e_2), \ldots, T(e_n)$.*

Contoh 6.4. Dari Contoh 6.3, yakni $T: R^2 \to R^3$ didefinisikan oleh:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y \\ -x \\ x-y \end{bmatrix}$$

Kita akan membuktikannya dengan menggunakan transformasi matriks. Misalkan $\{e_1, e_2\}$ adalah basis baku di R^2, sehingga:

$$T(e_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},\; T(e_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Matriks A adalah:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Sebagai pemeriksaan, perhatikan bahwa:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ -x \\ x-y \end{bmatrix}.$$

Misalkan $\vec{v}_1 = (x_1, y_1)$ dan $\vec{v}_2 = (x_2, y_2)$, dipeolehlah:

$$T(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = T\left(\begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1+x_2+y_1+y_2 \\ -x_1-x_2 \\ x_1+x_2-y_1-y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ -x_1 \\ x_1-y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2+y_2 \\ -x_2 \\ x_2-y_2 \end{bmatrix} = T(\vec{v}_1) + T(\vec{v}_2)$$

dan untuk sembarang skalar k, kita dapat peroleh bahwa:

$$T(k\vec{v}_1) = T\left(\begin{bmatrix} kx_1 \\ ky_1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} kx_1 \\ ky_1 \end{bmatrix} = kT\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\right) = kT(\vec{v}_1)$$

Oleh karena itu, T adalah transformasi linier. □

Dari Teorema 6.3 dan Contoh 6.3, matriks A dihasilkan dari basis baku untuk R^n. Oleh karena itu, matriks A yang demikian disebut sebagai matriks baku untuk transformasi T.

Contoh 6.5 Misalkan $T: R^3 \to R^2$ adalah transformasi matriks, dan misalkan

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},\; T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix},\; T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Carilah:

(a) matriks tersebut.

(b) $T\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$

(c) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right)$

Untuk menjawab (a), perhatikan kembali Teorema 6.3. Teorema 6.3 menjamin bahwa matriks tersebut adalah matriks baku, yakni:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Untuk menjawab (b), perhatikan kembali bahwa pada transformasi matriks berlaku:

$$T\bar{x} = A\bar{x},$$

sehingga:

$$T\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Untuk menjawab (c), terapkan cara seperti (b) sehingga:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - 3y + z \\ x + 2y - 2z \end{bmatrix}$$

□

LATIHAN 6.1

1. Manakah dari pemetaan (transformasi) $T: R^2 \to R^2$ berikut ini yang linier?
   (a) $T(x, y) = (2x, 3y)$
   (b) $T(x, y) = (0, 0)$
   (c) $T(x, y) = (2x - y, 2x + y)$
   (d) $T(x, y) = (x^2, y^2)$
   (e) $T(x, y) = (x + 2y, -y)$
   (f) $T(x,y)=(x - 1,y)$
2. Misalkan $T: R^3 \to R$, apakah T linier untuk masing-masing fungsi berikut ini.
   (a) $T(x, y, z) = x - y + z$
   (b) $T(x, y, z) = 2x - 2y + z - 1$
   (c) $T(x, y, z) = xy + yz$
   (d) $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
3. Manakah dari pemetaan (transformasi) $T: R^3 \to R^2$ berikut ini yang linier?
   (a) $T(x, y, z) = (x + y + z, x - y - z)$
   (b) $T(x, y, z) = (2x + 3y, 4z - y)$
   (c) $T(x, y, z) = (x + y - z, 0)$
   (d) $T(x, y, z) = (x + xy, y + yz)$
   (e) $T(x, y, z) = (x^2 - y^2, z^2 + y^2)$
4. Manakah dari pemetaan (transformasi) $T: R^2 \to R^3$ berikut ini yang linier?
   (a) $T(x, y) = (x - y, -y, 2x + 3y)$
   (b) $T(x, y) = (0, 0, 0)$
   (c) $T(x, y) = (x + 1, y + 1, z + 1)$

5. Manakah dari pemetaan (transformasi) $T: M_{2x2} \to R$ berikut ini yang linier?
   (a) $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = ad - bc$
   (b) $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a - 2b + 3c - 4d$
   (c) $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = -a + 1$
6. Misalkan pemetaan $T: P_3 \to M_{2x2}$ didefinisikan oleh:
   $$T\left(a + bx + cx^2 + dx^3\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
   Buktikan bahwa T adalah transformasi linier.
7. Carilah matriks baku untuk masing-masing transformasi linier berikut ini.
   (a) $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_2 \\ -x_2 \end{bmatrix}$
   (b) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x - 2y \\ 2z - y \end{bmatrix}$
   (c) $T\left(a + bx + cx^2\right) = \begin{bmatrix} a - b \\ -c \\ b + c \end{bmatrix}$
   (d) $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} b - a \\ 2c - d \end{bmatrix}$
8. Misalkan $T: R^2 \to R^3$ adalah transformasi matriks, dan misalkan:
   $$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix},\quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$
   (a) Carilah matriks tersebut.
   (b) Carilah $T\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}\right)$.
   (c) Carilah rumus untuk $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)$.
9. Misalkan $D: P_4 \to P_2$ adalah transformasi diferensial $D(p(x))=p'(x)$, di mana $p(x) \in P_4$. Buktikan bahwa D adalah linier.
10. Misalkan $J: P_3 \to P_4$ adalah transformasi integrasi:
    $$J\left(p(x)\right) = \int_a^b p(x)dx;\ p(x) \in P_3.$$
    Buktikan bahwa J adalah linier.
11. Buktikan bahwa jika $T: V \to W$ adalah transformasi linier, maka $T(\vec{u} - \vec{v}) = T(\vec{u}) - T(\vec{v})$ untuk semua $\vec{u}, \vec{v} \in V$.
12. Misalkan $T: V \to W$ adalah transformasi linier dan $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ adalah basis untuk ruang vektor V. Jika $T(\vec{u}_1) = T(\vec{u}_2) = \cdots = T(\vec{u}_n) = 0$, maka

T adalah transformasi nol.

13. Dengan menggunakan induksi matematika, buktikan bahwa jika L adalah transformasi linier dari *V* ke *W*, maka:

$$L(k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \cdots + k_n\vec{v}_n) = k_1L(\vec{v}_1) + k_2L(\vec{v}_2) + \cdots + k_nL(\vec{v}_n)$$

6.2 KERNEL DAN JANGKAUAN

Pada bagian ini akan kita bahas mengenai kernel dan jangkauan. Definisi kernel dan jangkauan sebagai berikut.

Definisi 6.4 *Jika $T: V \to W$ adalah transformasil linier, maka himpunan V yang dipetakan oleh T ke $\vec{0} \in W$ disebut sebagai kernel (ruang nol atau inti) dari T. Himpunan ini disimbolkan dengan ker(T), yakni:*

$$\ker(T) = \{\vec{v} \in V; T(\vec{v}) = \vec{0}\}.$$

Definisi 6.5 *Jika $T: V \to W$ adalah transformasi linier, maka himpunan W yang merupakan bayangan (peta) di bawah transformasi T disebut sebagai jangkauan (range) dan disimbolkan dengan R(T). Dalam hal ini:*

$$R(T) = \{\vec{w} \in W;\ \vec{w} = T(\vec{v}) \text{untuk suatu}\ \vec{v} \in V\}.$$

Contoh 6.6 Misalkan $T: R^3 \to R^3$ adalah perkalian oleh matriks:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kernel (inti) dari transformasi *T* dapat dicari dengan persamaan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Solusi dari sistem persamaan tersebut adalah:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga $\ker(T) = \{\vec{0}\}$. Adapun jangkauan dari *T* adalah:

$$R(T) = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = R^3$$

sehingga sistem:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

konsisten. Misalkan kita ambil (2, 3, 1) $\in R^3$, sehingga:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Dapat kita katakan bahwa (7, −1, 4) terletak di *R(T)*. □

Contoh 6.7 Misalkan $D: P_3 \to P_2$ adalah transformasi diferensial:

$$D(p(x)) = P'(x)$$

Akan kita cari kernel dan jangkauannya. Misalkan $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in P_3$, sehingga:

$$D(a + bx + cx^2 + dx^3) = b + 2cx + 3dx^2.$$

Kernel dari *D* dapat kita tentukan asalkan:

$$b + 2cx + 3dx^2 = 0.$$

Persamaan ini akan dipenuhi jika hanya jika koefisien $b = c = d = 0$. Karena $b = c = d = 0$, kernel dari D adalah:

$$\ker(D) = \{a;\ a \in R\}.$$

Atau dapat dikatakan bahwa ker(D) adalah polinomial yang berupa konstanta. As $R(T) = P_2$, karena untuk setiap $q(x) \in P_2$ merupakan turunan dari polinomial P_3. □

Contoh 6.8 Misalkan $J: P_1 \to R$ adalah transformasi integrasi:

$$J(p(x)) = \int_{-1}^{1} p(x)dx$$

Akan kita cari kernel dan jangkauannya. Misalkan $p(x) = a + bx$, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} p(x)dx &= \int_{-1}^{1} (a + bx)dx \\ &= ax + \frac{1}{2}bx^2 \Big]_{-1}^{1} \\ &= \left(a + \frac{1}{2}b\right) - \left(-a + \frac{1}{2}b\right) \\ &= 2a \end{aligned}$$

Kernel dari J dapat kita tentukan asalkan $2a = 0$. Ini mengakibatkan nilai $a = 0$. Oleh karena itu,

$$\ker(J) = \{bx;\ b \in R\},$$

atau ker(J) adalah semua polinomial berbentuk bx. Untuk jangkauan, lihat hasil pada integrasi tersebut. Karena $2a = k$, di mana $a, k \in R$, maka jangkauan dari J adalah semua skalar riil k. □

Teorema 6.6 *Jika $T: V \to W$ adalah transformasi linier, maka:*

(i) Kernel dari T adalah subruang dari V.

(ii) Jangkauan dari T adalah subruang dari W.

Bukti diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

Contoh 6.9 Misalkan $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ adalah basis untuk R^3, di mana $\vec{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{v}_2 = (1, 1, 0)$, $\vec{v}_3 = (0, 0, 1)$ dan misalkan $T: R^3 \to R^2$ adalah transformasi linier sehingga:

$$T(\vec{v}_1) = (1,-2),\quad T(\vec{v}_2) = (-3,1),\quad T(\vec{v}_3) = (0,3)$$

Carilah rumus untuk $T(x_1, x_2, x_3)$, kemudian tentukan $T(3, 1, -4)$.
Kita nyatakan (x_1, x_2, x_3) sebagai kombinasi linier dari $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$, yakni:

$$(x_1, x_2, x_3) = k_1(1,0,0) + k_2(1,1,0) + k_3(0,0,1)$$

Kemudian kita tentukan k_1, k_2, dan k_3 dengan menyelesaikan persamaan:

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 &= x_1 \\ k_2 &= x_2\,. \\ k_3 &= x_3 \end{aligned}$$

Sehingga $k_1 = x_1 - x_2$, $k_2 = x_2$, dan $k_3 = x_3$. Dengan nilai-nilai ini diperoleh persamaan:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) &= (x_1 - x_2)(1,0,0) + x_2(1,1,0) + x_3(0,0,1) \\ &= (x_1 - x_2)\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan Definisi 6.1, diperoleh rumus:

$$\begin{aligned} T(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 - x_2)T(\vec{v}_1) + x_2 T(\vec{v}_2) + x_3 T(\vec{v}_3) \\ &= (x_1 - x_2)(1,-2) + x_2(-3,1) + x_3(0,3) \\ &= (x_1 - 4x_2, -2x_1 + 3x_2 + 3x_3) \end{aligned}$$

Dari rumus tersebut, kita peroleh:

$$T(3,1,-4) = (3-4, -6+3-12) = (-1,-15).$$ □

Definisi 6.7 *Jika $T: V \to W$ adalah transformasi linier, maka dimensi dari jangkauan T dinamakan rank(T) dan dimensi dari kernel dinamakan nulitas dari T atau N_T.*

Dari Definisi 6.7, kita dapat menggunakan Teorema 5.21 (Teorema *Rank*-Nulitas) untuk mencari dimensi kernel dan dimensi jangkauan. Contoh berikut ini memperlihatkan cara penentuan dimensi kernel dan jangkauan.

Contoh 6.10 Dari Contoh 6.6, telah diperoleh kernel dan jangkauannya yakni $ker(T) = \{\vec{0}\}$ dan $R(T) = (b_1, b_2, b_3) = R^3$. Oleh karena itu, dimensi dari $ker(T)$ ditulis $N_T = dim(ker(T)) = 0$ dan dimensi dari $R(T)$ ditulis $rank(T) = dim(R(T)) = 3$. □

Pada Contoh 6.10, telah kita ketahui bahwa $dim(ker(T)) = 0$, dengan menggunakan Teorema 5.21, diperoleh:

$$rank(T) + N_T = \dim(R(T)) + \dim(\ker(T)) = 3$$

sehingga:

$$\dim(R(T)) = 3 - 0 = 3$$

Contoh 6.11 Misalkan $T: P_2 \to R$ adalah transformasi linier yang didefinisikan sebagai:

$$T(p(x)) = \int_0^1 p(x)\,dx, \text{untuk setiap}\; p(x) \in P_2.$$

Tentukan dim($Inti(T)$).
Misalkan $p(x) = a + bx + cx^2$, sehingga:

$$\begin{aligned} \int_0^1 p(x)\,dx &= \int_0^1 (a + bx + cx^2)\,dx \\ &= ax + \frac{1}{2}bx^2 + \frac{1}{3}cx^3 \Big]_0^1 \\ &= a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c \end{aligned}$$

Untuk mencari inti (kernel) dari T haruslah:

$$a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c = 0$$

Solusi dari persamaan tersebut adalah $a = -\frac{1}{2}s - \frac{1}{3}t$, $b = s$, dan $c = t$ untuk sembarang skalar s dan t. Sehingga:

$$Inti(T) = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}$$

Oleh karena itu, *dim(Inti(T))* = 2.

LATIHAN 6.2

1. Misalkan $T: R^3 \to R^3$ adalah perkalian oleh matriks:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Yang manakah di antara matriks-matriks di bawah ini yang terletak pada *ker(T)*?

(a) $\begin{bmatrix} 7 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -14/9 \\ 10/9 \\ 2/3 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

2. Dari matriks pada soal nomor 1, manakah di antara vektor-vektor berikut ini yang terletak pada *ker(T)*.

(a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 \\ -17 \\ -17 \end{bmatrix}$

3. Tentukan kernel dan jangkauan dari setiap operator linier pada P_2 berikut ini di mana $p'(x)$ adalah turunan pertama dari $p(x) \in P_2$.
   (a) $T(p(x)) = xp'(x)$
   (b) $T(p(x)) = p(x) + p'(x)$
   (c) $T(p(x)) = p(0)x + p(1) + p'(x)$
4. Dari soal nomor 1, tentukan *rank* dan nulitas dari transformasi linier yang diberikan.
5. Dari soal nomor 3, tentukan *rank* dan nulitas dari transformasi linier yang diberikan.
6. Misalkan $T: R^2 \to P_2$ adalah transformasi linier dan diketahui:

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = -3 + 2x - x^2 \text{ dan } T\left(\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = -4x + 3x^2$$

   (a) Carilah rumus untuk $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)$.
   (b) Carilah $T\left(\begin{bmatrix} -5 \\ -11 \end{bmatrix}\right)$ dari hasil (a).
7. Jelaskanlah kernel dan jangkauan dari transformasi linier $T: V \to W$ yang didefinisikan oleh:
   (a) $T(\vec{v}) = \vec{0}$ (b) $T(\vec{v}) = 2\vec{v}$
8. Buktikan Teorema 6.6.
9. Buktikan jika $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ adalah sebuah basis untuk V dan $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_n\}$ adalah vektor-vektor pada W, yang tak harus berlainan, maka terdapat transformasi linier $T: V \to W$ sedemikian hingga $T(\vec{u}_1) = \vec{w}_1, T(\vec{u}_2) = \vec{w}_2, \ldots T(\vec{u}_n) = \vec{w}_n$
10. Misalkan $D: P_n \to P_n$ adalah transformasi diferensiasi $D(p(x)) = p'(x)$. Jelaskan kernel dan jangkauan dari D. Kemudian tentukan dimensi dari *ker(D)* dan dimensi dari *R(T)*.
11. Misalkan $J: P_n \to R$ adalah transformasi linier yang didefiniskan oleh:

$$J(p(x)) = \int_0^1 p(x)\,dx, \text{untuk setiap } p(x) \in P_n.$$

Tentukan dim(*Inti(J)*) dan dim(R(*J*)).

6.3 MATRIKS TRANSFORMASI LINIER

Pada bagian ini, pertama sekali kita bahas mengenai vektor koordinat dan matriks koordinat. Misalkan $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ adalah basis untuk ruang vektor V. Karena B adalah basis di V, jelaslah B bebas linier. Pada bagian 5.3.2, untuk sembarang vektor $\vec{v}$ di V dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier:

$$\vec{v} = k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + \ldots + k_n\vec{u}_n$$

Skalar $k_1, k_2, \ldots, k_n$ dinamakan sebagai koordinat $\vec{v}$ terhadap basis B. Kumpulan skalar ini membentuk sebuah vektor di R^n yang dinamakan vektor koordinat $\vec{v}$ terhadap basis B dinyatakan dengan $(\vec{v})_B$ atau dapat ditulis sebagai:

$$(\vec{v})_B = (k_1, k_2, \ldots, k_n). \tag{6.1}$$

Bentuk (6.1) dapat ditulis dalam bentuk matriks yakni:

$$[\vec{v}]_B = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$$

di mana $[\vec{v}]_B$ merupakan matriks koordinat $\vec{v}$ terhadap basis B.

Contoh 6.12 Misalkan B = {(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)} adalah sebuah basis untuk R^3 dan vektor $\vec{v}$ = (1, 2, 1) di R^3. Kita akan mencari vektor koordinat dan matriks koordinat $\vec{v}$ terhadap basis B.

Misalkan $\vec{v}$ dapat ditulis sebagai kombinasi linier:

$$(1,2,1) = k_1(1,1,1) + k_2(1,1,0) + k_3(1,0,0).$$

Dari bentuk kombinasi linier ini, diperoleh tiga buah persamaan, yakni:

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + k_3 &= 1 \\ k_1 + k_2 &= 2 \\ k_1 &= 1 \end{aligned}$$

Penyelesaian sistem persamaan ini adalah $k_1 = 1$, $k_2 = 1$, dan $k_3 = -1$. Oleh karena itu, vektor koordinat dan matriks koordinatnya adalah

$$(\vec{v})_B = (1,1,-1) \text{ dan } [\vec{v}]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

□

Contoh 6.13 Dari basis pada Contoh 6.11, kita akan mencari $\vec{v}$ di R^3 di mana $(\vec{v})_B = (-4, 7, -1)$. Kita tuliskan $\vec{v}$ sebagai kombinasi linier, sehingga:

$$\vec{v} = -4(1,1,1) + 7(1,1,0) - 1(1,0,0) = (2,3,-4)$$

□

Misalkan T: $V \to W$ adalah sebuah transformasi matriks dengan V berdimensi n dan W berdimensi m, sehingga:

$$T(\vec{x}) = A(\vec{x});\ \vec{x} \in V$$

Kita dapat memilih basis B untuk V dan basis B' untuk W sedemikian sehingga $\vec{x}$ akan relatif terhadap basis B dan matriks koordinatnya adalah $[\vec{x}]_B$. Karena $T(\vec{x}) \in W$, maka $T(\vec{x})$ akan relatif terhadap basis B' dan matriks koordinatnya adalah $[T(\vec{x})]_{B'}$. Oleh karena itu,

$$[T(\vec{x})]_{B'} = A[\vec{x}]_B$$

Dalam hal ini matriks A merupakan matriks transformasi yang relatif terhadap basis B dan B'. Matriks A yang merupakan penyajian transformasi linier T: $V \to W$ dapat dilihat dalam teorema berikut ini.

Teorema 6.8 *Misalkan V dan W adalah ruang-ruang vektor yang berdimensi hingga dengan basis berturut-turut yakni B dan B', di mana $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ dan $B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m\}$. Jika T: $V \to W$ adalah transformasi linier, maka matriks penyajian transformasi T adalah:*

$$A = \left[[T(\vec{u}_1)]_{B'} \quad [T(\vec{u}_2)]_{B'} \quad \cdots \quad [T(\vec{u}_n)]_{B'} \right]$$

yang memenuhi persamaan $[T(\vec{u})]_{B'} = A[\vec{u}]_B$ untuk setiap $\vec{u}$ di V.

Misalkan $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ dan $B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m\}$. Metode langsung untuk mencari matriks A pada Teorema 6.8 sebagai berikut.

(1) Carilah matriks $[T(\vec{u}_i)]$ dengan $\vec{u}_i \in$ B.

(2) Buatlah $[T(\vec{u}_i)]$ sebagai kombinasi linier dari $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ yakni

$$[T(\vec{u}_i)] = k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \cdots + k_m\vec{v}_m$$

(3) Selesaikanlah langkah (2) sehingga diperoleh nilai $k_1, k_2, \ldots, k_m$.

(4) Buatlah matriks $[T(\vec{u}_i)]_{B'}$ sesuai dengan nilai $k_1, k_2, \ldots, k_m$ untuk masing-masing $\vec{u}_i \in B$ yakni:

$$[T(\vec{u}_i)]_{B'} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix}.$$

(5) Buatlah matriks A yang kolom-kolomnya merupakan matriks $[T(\vec{u}_i)]_{B'}$ yakni:

$$A = \left[[T(\vec{u}_1)]_{B'} \quad [T(\vec{u}_2)]_{B'} \quad \cdots \quad [T(\vec{u}_n)]_{B'} \right]$$

Dari Teorema 6.8, jika $B' = B$, maka matriks penyajian T adalah:

$$A = \left[[T(\vec{u}_1)]_B \quad [T(\vec{u}_2)]_B \quad \cdots \quad [T(\vec{u}_n)]_B \right].$$

Contoh berikut ini memperlihatkan bahwa $B' = B$.

Contoh 6.13 Misalkan T: $R^2 \to R^2$ adalah operator linier yang didefinisikan oleh:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x_1 - x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{bmatrix}$$

Carilah matriks penyajian T terhadap basis $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ di mana $\vec{u}_1 = (1,1)$ dan $\vec{u}_2 = (1,-1)$.

Pertama cari terlebih dahulu $T(\vec{u}_1)$ dan $T(\vec{u}_2)$ yakni:

$$T(\vec{u}_1) = T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ dan } T(\vec{u}_2) = T\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Dengan menuliskan $T(\vec{u}_1)$ sebagai kombinasi linier dari $\vec{u}_1, \vec{u}_2$, yakni:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = k_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

diperoleh $k_1 = 3$ dan $k_2 = -1$. Sehingga:

$$T(\vec{u}_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 3\vec{u}_1 - \vec{u}_2$$

Kemudian, dengan menuliskan $T(\vec{u}_1)$ sebagai kombinasi linier dari $\vec{u}_1, \vec{u}_2$, yakni:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = k_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

diperoleh $k_1 = 1$ dan $k_2 = 3$. Sehingga:

$$T(\vec{u}_2)=\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}=\vec{u}_1+3\vec{u}_2$$

Oleh karena itu,

$$[T(\vec{u}_1)]_{B'}=\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix},\ [T(\vec{u}_2)]_{B'}=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$$

dan

$$A=\left[[T(\vec{u}_1)]_{B'}\ \ [T(\vec{u}_2)]_{B'}\right]=\begin{bmatrix}3&1\\-1&3\end{bmatrix}$$ □

Contoh 6.14 Misalkan $T: R^2 \to R^3$ didefinisikan oleh:

$$T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x_1+2x_2\\-x_1\\0\end{bmatrix}$$

Carilah matriks penyajian T terhadap basis $B=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$ dan $B=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$, di mana:

$$\vec{u}_1=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix},\vec{u}_2=\begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix},\vec{v}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\vec{v}_2=\begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix},\vec{v}_3=\begin{bmatrix}3\\0\\0\end{bmatrix}$$

Pertama cari terlebih dahulu $T(\vec{u}_1)$ dan $T(\vec{u}_2)$, yakni:

$$T(\vec{u}_1)=T\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\-1\\0\end{bmatrix} \text{ dan } T(\vec{u}_2)=T\begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\2\\0\end{bmatrix}$$

Dengan menuliskan $T(\vec{u}_1)$ sebagai kombinasi linier dari $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$, yakni:

$$\begin{bmatrix}7\\-1\\0\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}3\\0\\0\end{bmatrix}$$

diperoleh $k_1 = 0$, $k_2 = -1/2$, dan $k_3 = 8/3$. Sehingga:

$$T(\vec{u}_1)=\begin{bmatrix}7\\-1\\0\end{bmatrix}=-\frac{1}{2}\vec{v}_2+\frac{8}{3}\vec{v}_3$$

Kemudian, dengan menuliskan $T(\vec{u}_2)$ sebagai kombinasi linier dari $\vec{u}_1,\vec{u}_2$, yakni:

$$\begin{bmatrix}6\\2\\0\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}3\\0\\0\end{bmatrix}$$

diperoleh $k_1 = 0$, $k_2 = 1$ dan $k_3 = 4/3$. Sehingga:

$$T(\vec{u}_2)=\begin{bmatrix}6\\2\\0\end{bmatrix}=\vec{v}_2+\frac{4}{3}\vec{v}_3$$

Oleh karena itu,

$$[T(\vec{u}_1)]_{B'}=\begin{bmatrix}0\\-1/2\\8/3\end{bmatrix},[T(\vec{u}_2)]_{B'}=\begin{bmatrix}0\\1\\4/3\end{bmatrix}$$

dan

$$A=\left[[T(\vec{u}_1)]_{B'}\ \ [T(\vec{u}_2)]_{B'}\right]=\begin{bmatrix}0&0\\-1/2&1\\8/3&4/3\end{bmatrix}$$ □

LATIHAN 6.3

1. Carilah vektor dan matriks koordinat $\vec{v}$ = (10, 18) terhadap basis B = {(1, -1), (3, 4)}.
2. Dari basis pada soal nomor 1, carilah carilah vektor $\vec{v}$ di R^2 di mana $(\vec{v})_B$ = (7, -12).
3. Carilah vektor dan matriks koordinat $\vec{v}$ = (5, -8, 23) terhadap basis B = {(2, 0,- 3), (-3, -1, 7), (3, -2, 4)}.
4. Dari basis pada soal nomor 3, carilah vektor $\vec{v}$ di R^3 di mana $(\vec{v})_B$ = (-2, -3, -6).
5. Carilah vektor dan matriks koordinat $p = 6 - x + x^2$ terhadap basis $B = \{p_1, p_2, p_3\}$ di mana:

   $$p_1=4-2x+x^2,\ p_2=-2+3x-4x^2,\ p_3=2x-2x^2$$
6. Dari basis pada soal nomor 5, carilah vektor p di P_2 di mana $(p)_B$ = (-7, 0, 4).
7. Misalkan $T: R^3 \to R^3$ adalah operator linier yang didefinisikan oleh:

   $$T\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x+y\\y-z\\z-x\end{bmatrix}.$$

   Carilah matriks penyajian T terhadap:
   (a) Basis baku untuk R^3.
   (b) Basis B = {(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)}.
8. Misalkan $T: R^2 \to R^3$ adalah transformasi linier yang didefinisikan oleh:

   $$T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}3x-4y\\x-3y\\-y\end{bmatrix}$$

   (a) Carilah matriks penyajian T terhadap basis baku R^2 dan R^3.

(b) Carilah $T\left(\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$ dengan menggunakan matriks yang diperoleh pada bagian (a).

9. Misalkan $T: R^2 \to R^3$ adalah operator linier yang didefinisikan oleh:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ -x_2 \end{bmatrix}$$

(a) Carilah matriks penyajian T terhadap basis $B = \{(1, 0), (-1, 1)\}$ dan $B' = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

(b) Dengan matriks yang diperoleh pada bagian (a), carilah $T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}\right)$

10. Misalkan $T: R^2 \to R^2$ adalah operator linier yang didefinisikan oleh:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - 2x_2 \end{bmatrix}.$$

(a) Carilah matriks penyajian T terhadap basis $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ di mana $\vec{u}_1 = (1,1)$ dan $\vec{u}_2 = (1,-1)$.

(b) Gunakan matriks penyajian T yang diperoleh pada bagian (*a*) untuk membentuk kembali rumus $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - 2x_2 \end{bmatrix}$

NILAI EIGEN DAN DIAGONALISASI

7

Pada bab ini akan kita bahas mengenai nilai *eigen* dan vektor *eigen*, diagonalisasi, dan diagonalisasi ortogonal. Masing-masing pokok pembicaraan diuraikan sebagai berikut.

7.1 NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN

Kata "*eigen*" berasal dari bahasa Jerman yang artinya adalah sebenarnya atau karakteristik. Sehingga nilai *eigen* sering disebut sebagai nilai karakteristik. Nilai *eigen* disimbolkan dengan "λ" dibaca lamda. Berikut ini diberikan definisi tentang nilai *eigen* dan vektor *eigen*.

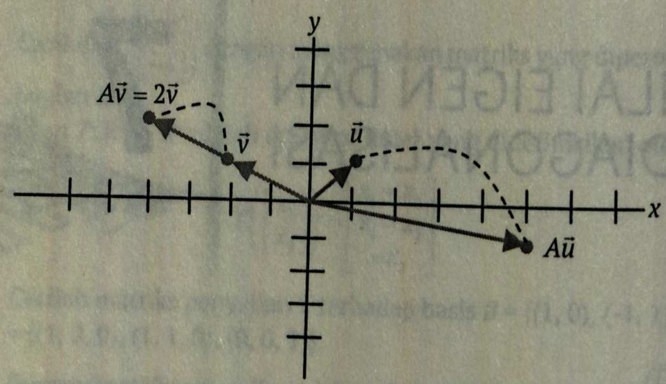
Definisi 7.1 *Misalkan A adalah matriks persegi yang berukuran n x n. Sebuah vektor tak nol $\vec{x}$ di R^n dinamakan vektor eigen (eigen vektor) dari A jika $A\vec{x}$ merupakan kelipatan skalar dari $\vec{x}$ yakni:*

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \tag{7.1}$$

untuk suatu skalar λ. Skalar λ disebut sebagai nilai eigen (eigen value) dari A jika terdapat solusi tak trivial $\vec{x}$ yang memenuhi $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ dan $\vec{x}$ disebut sebagai vektor eigen yang bersesuaian dengan λ.

Bila dipandang dari sisi geometri, $A\vec{x}$ merupakan dilatasi dari $\vec{x}$. Perhatikan contoh berikut ini.

Contoh 7.1 Misalkan $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, dan $\vec{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Perkalian $A\vec{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$ dan $A\vec{v} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\vec{v}$. Bayangan $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ di bawah perkalian A dapat dilihat pada Gambar 7.1. □



GAMBAR 7.1. BAYANGAN $A\vec{u}$ DAN $A\vec{v}$

Pada Contoh 7.1, perkalian $A\vec{v} = \begin{bmatrix}-4\\2\end{bmatrix} = 2\vec{v}$ bersesuaian dengan λ = 2. Persoalannya sekarang, bagaimana mencari nilai *eigen* atau λ tersebut? Untuk mencari nilai *eigen* dari matriks persegi *A* yang berukuran *n x n*, kita dapat menuliskan bentuk (7.1) menjadi:

$$A\vec{x} = \lambda I\vec{x} \qquad (7.2)$$

di mana *I* adalah matriks identitas yang berukuran *n x n*. Selanjutnya bentuk (7.2) ekivalen dengan:

$$\lambda I\vec{x} - A\vec{x} = 0 \qquad (7.3)$$

$$(\lambda I - A)\vec{x} = 0 \qquad (7.4)$$

Jika λ*I*–*A* adalah matriks tak singular (determinannya ≠ 0), maka solusi dari $\vec{x}$ adalah trivial ($x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$). Berdasarkan Definisi 7.1, agar solusi dari $\vec{x}$ menjadi tak trivial maka matriks λ*I*–*A* haruslah singular (determinannya = 0). Dalam hal ini kita punyai:

$$\det(\lambda I - A) = 0 \qquad (7.5)$$

Persamaan (7.5) disebut sebagai persamaan karakteristik *A*, dan persamaan inilah yang kita digunakan untuk mencari nilai *eigen*. Karena matriks A berukuran *n x n* maka persamaan (7.5) nantinya akan menjadi persamaan polinomial λ dengan derajat *n*, atau kita dapat menuliskannya sebagai:

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \ldots + c_{n-1}\lambda + c_n = 0 \qquad (7.6)$$

Nilai λ pada persamaan (7.6) dapat dicari dengan cara memfaktorkannya. Apabila berupa persamaan kuadrat yang tidak dapat difaktorkan, nilai *eigen* dapat dicari menggunakan rumus kuadrat. Agar pembaca dapat lebih memahami tentang nilai *eigen*, perhatikanlah contoh berikut ini.

Contoh 7.2 Carilah nilai-nilai *eigen* dari matriks $A = \begin{bmatrix}1 & 5\\2 & -2\end{bmatrix}$. *Pertama*, cari terlebih dahulu λ*I*–*A*, yakni:

$$\lambda I - A = \lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 5\\2 & -2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda-1 & -5\\-2 & \lambda+2\end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan persamaan (7.5), diperoleh:

$$det(\ \ I - A) = \begin{vmatrix}-1 & -5\\-2 & +2\end{vmatrix} =$$

Persamaan karakteristiknya adalah:

$$(\lambda-1)(\lambda+2) - 10 = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 12 = 0$$

Dengan memfaktorkan persamaan karakteristik, diperoleh dua buah nilai *eigen*, yaitu λ = –4 dan λ = 3. □

Contoh 7.3 Carilah nilai *eigen* dari matriks $A = \begin{bmatrix}-2 & 5\\1 & 3\end{bmatrix}$. Dengan melakukan serangkaian cara yang sama seperti pada Contoh 7.2, diperoleh:

$$\det(\lambda I - A) = \det\left(\begin{bmatrix}\lambda & 0\\0 & \lambda\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-2 & 5\\1 & 3\end{bmatrix}\right)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix}\lambda+2 & -5\\-1 & \lambda-3\end{bmatrix}\right)$$

$$= \lambda^2 - \lambda - 11$$

Persamaan karakteristiknya adalah:

$$\lambda^2 - \lambda - 11 = 0.$$

Nilai λ dapat dicari dengan menggunakan rumus:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1+44}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{42}}{2}$$

Sehingga nilai eigennya adalah:

$$\lambda = \frac{1+\sqrt{42}}{2} \text{ dan } \lambda = \frac{1-\sqrt{42}}{2}$$ □

Contoh 7.4 Carilah nilai *eigen* dari matriks $A = \begin{bmatrix}3 & -7\\-1 & -3\end{bmatrix}$. Dengan melakukan serangkaian cara yang sama seperti pada Contoh 7.2, diperoleh:

$$\det(\lambda I - A) = \det\left(\begin{bmatrix}\lambda-3 & 7\\1 & \lambda+3\end{bmatrix}\right)$$

$$= \lambda^2 - 16$$

Persamaan karakteristiknya adalah:

$$\lambda^2 - 16 = 0.$$

Sehingga nilai *eigen*-nya adalah λ = –4 dan λ = 4.

Contoh 7.5 Carilah nilai *eigen* dari matriks $A=\begin{bmatrix}-1 & -5\\ 1 & 1\end{bmatrix}$. Dengan melakukan serangkaian cara yang sama seperti pada Contoh 7.2, diperoleh:

$$\begin{aligned} det(\lambda I-A) &= det\left(\begin{bmatrix}\lambda+1 & 5\\ -1 & \lambda-1\end{bmatrix}\right)\\ &= \lambda^2+4 \end{aligned}$$

Persamaan karakteristiknya adalah:

$$\lambda^2+4=0$$

Nilai yang memenuhi adalah $\lambda = -2i$ dan $\lambda = 2i$. Karena kita menganggap bahwa λ di sini merupakan skalar real, maka matriks A tidak mempunyai nilai *eigen*. □

Dalam teorema berikut ini, terdapat beberapa pernyataan yang dapat kita peroleh sejauh ini.

Teorema 7.2 *Jika A adalah matriks yang berukuran n x n, maka pernyataan berikut ini ekivalen satu sama lain:*

(i) λ adalah nilai eigen dari A.
(ii) Sistem persamaan $(\lambda I - A)\bar{x} = 0$ mempunyai pemecahan yang tak trivial
(iii) Ada vektor tak nol $\bar{x}$ di dalam R^n sehingga $A\bar{x}\quad \bar{x}$.
(iv) Adalah penyelesaian real dari persamaan karakteristik det(I – A) = 0.

Teorema 7.2 dapat dibuktikan dengan (i) ⇒ (ii) ⇒ (iii) ⇒ (iv) dan (iv) ⇒ (iii) ⇒ (ii) ⇒ (i). Teorema berikut ini memberikan sebuah karakteristik dari nilai *eigen* suatu matriks segitiga.

Teorema 7.3 *Jika A adalah sebuah matriks segitiga, maka nilai-nilai eigen dari A adalah entri-entri pada diagonal utamanya.*

Bukti. Karena A merupakan matriks segitiga, matriks A dapat dituliskan sebagai:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

atau

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

Menurut Teorema 3.7, $det(A) = a_{11}.a_{22}.a_{33}.\dots.a_{nn}$. Selanjutnya $\lambda I–A$ juga merupakan matriks diagonal (buktikan), sehingga determinannya juga merupakan perkalian dari entri-entri pada diagonal utamanya. Dalam hal ini, polinom karakteristiknya adalah:

$$det(\lambda I-A)=(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\cdots(\lambda-a_{nn})$$

dan persamaan karakteristiknya adalah:

$$(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\cdots(\lambda-a_{nn})=0$$

Sehingga nilai-nilai *eigen*-nya adalah $\lambda = a_{11}$, $\lambda = a_{22}$, …, $\lambda = a_{nn}$, yang keseluruhannya merupakan entri-entri pada diagonal utamanya. ■

Contoh 7.6 Dengan menggunakan Teorema 7.3, nilai-nilai *eigen* dari matriks $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 3 & -4 & 5\end{bmatrix}$ adalah $\lambda = 2$, $\lambda = -1$, dan $\lambda = 5$. Nilai-nilai *eigen* dari matriks $B=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0 & -7 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ adalah $\lambda = -1$, $\lambda = -7$, dan $\lambda = 1/2$. Buktikan dengan menggunakan cara pada Contoh 7.2.

Bagaimana nilai *eigen* untuk *invers* dari suatu matriks persegi? Perhatikanlah contoh berikut.

Contoh 7.7 Dari matriks pada Contoh 7.4 yaitu $A=\begin{bmatrix}3 & -7\\ -1 & -3\end{bmatrix}$, nilai eigennya adalah $\lambda = -4$ dan $\lambda = 4$. *Invers* dari matriks A adalah:

$$A^{-1}=-\frac{1}{16}\begin{bmatrix}-3 & 7\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

Dengan melakukan serangkaian cara yang sama seperti pada Contoh 7.2, diperoleh:

$$\begin{aligned} det(\lambda I-A^{-1}) &= det\left(\begin{bmatrix}\lambda-\frac{3}{16} & \frac{7}{16}\\ \frac{1}{16} & \lambda+\frac{3}{16}\end{bmatrix}\right)\\ &= \lambda^2-\frac{1}{16}\end{aligned}$$

Persamaan karakteristiknya adalah:

$$\lambda^2 - \frac{1}{16} = 0$$

Dengan memfaktorkan persamaan karakteristik, diperoleh dua buah nilai *eigen* yaitu $\lambda = -\frac{1}{4}$ dan $\lambda = \frac{1}{4}$. □

Dari Contoh 7.6, dapat kita lihat bahwa nilai *eigen* dari A^{-1} adalah $1/\lambda$, di mana λ adalah nilai *eigen* dari A. Dari contoh ini, dapat ditarik sebuah kesimpulan seperti yang tertuang dalam teorema berikut.

Teorema 7.4. *Misalkan A adalah matriks invertibel. Jika λ adalah nilai eigen dari A, maka 1/λ adalah nilai eigen dari* A^{-1}.

Bukti. Karena A adalah matriks invertibel, maka A mempunyai *invers*. Misalkan λ adalah nilai-nilai *eigen* dari A dan untuk suatu vektor $\bar{x} \neq 0$ diperoleh:

$$A^{-1}\bar{x} = A^{-1}(1\bar{x}) = A^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}.\lambda.\bar{x}\right) = \frac{1}{\lambda}A^{-1}(\lambda.\bar{x}).$$

Dengan menggunakan bentuk (7.1) diperoleh:

$$A^{-1}\bar{x} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}(A.\bar{x}) = \frac{1}{\lambda}(A^{-1}.A)\bar{x} = \frac{1}{\lambda}.I.\bar{x} = \frac{1}{\lambda}\bar{x}.$$

Oleh karena itu, $1/\lambda$ merupakan nilai *eigen* dari A^{-1}.

Sekarang kita bahas mengenai vektor *eigen*. Pada Definisi 7.1 telah kita ketahui bahwa vektor *eigen* dari matriks A adalah vektor tak nol $\bar{x}$ yang memenuhi persamaan $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$. Ada beberapa langkah untuk menentukan nilai *eigen* dan vektor *eigen*, yakni:

1. Tentukan persamaan karakteristik dengan menggunakan persamaan $det(\lambda I - A) = 0$.
2. Tentukan nilai *eigen* λ dengan menyelesaikan persamaan karakteristik yang diperoleh dari langkah 1.
3. Untuk setiap nilai *eigen* λ yang telah diperoleh pada langkah 2, tentukanlah ruang *eigen* (ruang nol) dari persamaan $(\lambda I - A)\,\bar{x} = 0$. Vektor tak nol yang diperoleh dari setiap nilai *eigen*, merupakan vektor *eigen* dari matriks A.
4. Tentukanlah basis untuk ruang *eigen* tersebut.

Contoh 7.8 Carilah basis-basis untuk ruang *eigen* dari matriks:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Dengan melakukan serangkaian cara yang sama seperti pada Contoh 7.2, diperoleh persamaan karakteristik yakni:

$$(\lambda - 1)(\lambda - 5)^2 = 0.$$

Sehingga diperoleh $\lambda = 1$ dan $\lambda = 5$.

Dari Definisi 7.1, $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ merupakan vektor *eigen* yang bersesuaian dengan nilai λ. Dari persamaan $(\lambda I - A)\,\bar{x} = 0$, yakni:

$$\begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7.7)$$

Untuk $\lambda = 1$, bentuk (7.7) menjadi:

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dengan menyelesaikan sistem persaman tersebut, diperoleh

$$x_1 = -s,\ x_2 = s, \text{ dan } x_3 = 0$$

Vektor *eigen* yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$ adalah:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sehingga:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

merupakan basis untuk ruang *eigen* yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$. Untuk $\lambda = 5$, bentuk (7.7) menjadi:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dengan menyelesaikan sistem persaman tersebut, diperoleh:

$$x_1 = -s,\ x_2 = s, \text{ dan } x_3 = t$$

Vektor *eigen* yang bersesuaian dengan $\lambda = 5$ adalah:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} s \\ s \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Karena vektor-vektor:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{dan} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

adalah bebas linier, maka vektor-vektor tersebut membentuk basis untuk ruang *eigen* yang bersesuaian dengan $\lambda = 5$. □

Pada Contoh 7.6, untuk $\lambda = 1$, vektor eigennya adalah $\vec{x} = (-s,s,0)^T$ untuk sembarang bilangan skalar real s. Jadi, $(-1,1,0)^T$, $(-2,2,0)^T$, $(1,-1,0)^T$ juga merupakan vektor eigennya. Misalkan kita ambil $\vec{x} = (1,-1,0)$. Dari Definisi 7.1, diperoleh:

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Oleh karena itu, vektor *eigen* yang bersesuaian dengan nilai λ adalah tak hingga banyaknya. Untuk memudahkan kita dalam pemilihan vektor *eigen*, kita dapat menganggap basis dari ruang *eigen* sebagai vektor eigennya. Sehingga $(-1,1,0)^T$, $(1,1,0)^T$, dan $(0,0,1)^T$ merupakan vektor-vektor *eigen* dari matriks A.

Definisi 7.5 *Misalkan T: $V \to V$ adalah sebuah transformasi linier. Bilangan skalar λ adalah nilai eigen dari T jika terdapat sebuah vektor tak nol $\vec{x}$ di T sedemikian sehingga bentuk (7.1) menjadi:*

$$T\vec{x} = \lambda\vec{x}. \tag{7.7}$$

Vektor $\vec{x}$ disebut sebagai vektor eigen dari T yang bersesuaian dengan nilai λ.

Di sini kita definisikan sebuah matriks T yang berasal dari transformasi linier T, sehingga bentuk (7.5) menjadi:

$$det(\lambda I - T) = 0 \tag{7.8}$$

Persamaan (7.8) disebut sebagai persamaan karakteristik. Selanjutnya, kita juga dapat mengubah bentuk (7.4) menjadi:

$$(\lambda I - T)\vec{x} = 0 \tag{7.9}$$

Penyelesaian dari sistem (7.9) berupa vektor *eigen* yang bersesuain dengan nilai λ dan ruang penyelesaian dari sistem (7.9) disebut sebagai ruang *eigen* (kernel). Agar pembaca dapat lebih memahami, perhatikanlah contoh berikut ini.

Contoh 7.9 Tentukan nilai *eigen* dan basis untuk ruang *eigen* dari operator linier T: $P_2 \to P_2$ yang didefinisikan oleh:

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (3a_0 + 2a_1) + (2a_0 + 3a_1)x + (5a_2)x^2.$$

Matriks T terhadap basis baku $B = \{1, x, x^2\}$ adalah:

$$T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Pada Contoh 7.8 telah diperoleh nilai karakteristiknya yakni $\lambda = 1$ dan $\lambda = 5$. Pada Contoh 7.8 juga telah diperoleh bahwa ruang *eigen* T yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$ mempunyai basis $u_1 = (-1, 1, 0)^T$ dan ruang *eigen* yang bersesuaian dengan $\lambda = 5$ mempunyai basis $u_2 = (1, 1, 0)^T$ dan $u_3 = (0, 0, 1)^T$.

Matriks-matriks yang merupakan matriks koordinat terhadap basis baku B adalah:

$$p_1 = -1 + x,\ p_2 = 1 + x,\ \text{dan } p_3 = x^2$$

Oleh karena itu, $\{-1 + x\}$ merupakan adalah basis untuk T yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$, dan $\{1 + x, x^2\}$ adalah basis untuk T yang bersesuaian dengan $\lambda = 5$. □

Contoh 7.10 Misalkan sebuah transformasi linier T: $M_{2x2} \to M_{2x2}$ yang didefinisikan oleh:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} c & a \\ d & b \end{bmatrix}$$

(a) Carilah nilai-nilai *eigen* T.
(b) Carilah basis-basis untuk ruang *eigen* T.
(c) Jika A adalah vektor *eigen* T untuk $\lambda = -1$, maka tentukan *det(A)*.

Untuk menjawab (a), terlebih dahulu kita tuliskan bentuk (7.7) menjadi:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \lambda\begin{bmatrix} a & d \\ c & d \end{bmatrix}$$

atau:

$$\begin{bmatrix} c & a \\ d & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{bmatrix}$$

Sehingga kita peroleh sistem persamaan:

$$\begin{aligned} \lambda a - c &= 0 \\ -a + \lambda b &= 0 \\ \lambda c - d &= 0 \\ -b + \lambda d &= 0 \end{aligned} \tag{7.10}$$

Sistem persamaan ini akan mempunyai solusi tak trivial untuk a, b, c, dan d jika:

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

atau $\lambda^4 - 1 = 0$. Kita faktorkan menjadi:

$$(\lambda^2+1)(\lambda^2-1)=0$$
$$(\lambda-i)(\lambda+i)(\lambda-1)(\lambda+1)=0$$

Dapat kita peroleh nilai *eigen*-nya yakni $\lambda = i$, $\lambda = -i$, $\lambda = 1$, $\lambda = -1$. Karena kita menganggap λ adalah skalar real, maka yang memenuhi adalah $\lambda = 1$ dan $\lambda = -1$.

Untuk menjawab (b), substitusikanlah nilai λ yang telah kita peroleh pada bagian (a) ke dalam matriks yang diperbesar dari sistem (7.10). Jika nilai $\lambda = -1$, maka diperolehlah matriks.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks yang diperbesar tersebut diperoleh $a = s$, $b = -s$, $c = -s$, $d = s$. Vektor *eigen* yang bersesuaian dengan $\lambda = -1$ adalah:

$$s\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, merupakan basis untuk T. Untuk nilai $\lambda = 1$, diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

Untuk menjawab (c), kita lihat kembali vektor *eigen* yang telah diperoleh pada bagian (b). Anggaplah nilai $s = 1$, maka akan kita peroleh:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ dan } det(A)=0$$ □

LATIHAN 7.1

1. Tentukanlah persamaan karakteristik dan nilai *eigen* dari matriks-matriks berikut ini.

   (a) $\begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

2. Carilah basis-basis untuk ruang *eigen* dari matriks-matriks pada soal nomor 1.
3. Tentukanlah persamaan karakteristik dan nilai *eigen* dari matriks-matriks berikut ini.

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. Carilah basis-basis untuk ruang *eigen* dari matriks-matriks pada soal nomor 3.
5. Misalkan $T: P_2 \to P_2$ didefinisikan oleh:
   $T(a + bx + cx^2) = (a + 2b + 2c) + (2b + c)x - (a - 2b - 2c)x^2$
   (a) Tentukan nilai-nilai *eigen* dari T.
   (b) Tentukan basis-basis untuk ruang *eigen* T.
6. Misalkan sebuah transformasi linier $T: M_{2x2} \to M_{2x2}$ yang didefinisikan oleh:
   $$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 2b & a+b \\ -2b+c & d \end{bmatrix}$$
   (a) Carilah nilai-nilai *eigen* T.
   (b) Carilah basis-basis untuk ruang *eigen* T.
7. Buktikanlah bahwa $\lambda = 0$ adalah nilai *eigen* dari matriks A jika dan hanya jika A adalah matriks singular.
8. Misalkan A adalah matriks yang invertibel. Buktikanlah bahwa jika λ adalah nilai *eigen* tak nol dari matriks A, maka $\frac{|A|}{\lambda}$ adalah nilai *eigen* dari *adjoint* A.
9. Buktikanlah jika A dan B adalah dua buah matriks tak singular yang berukuran $n \times n$, maka $A^{-1}B$ dan $B^{-1}A$ mempunyai nilai *eigen* yang sama.
10. Misalkan A adalah matriks persegi. Jika λ adalah nilai *eigen* dari A, maka λ juga merupakan nilai *eigen* dari A^T.
11. Perlihatkanlah bahwa jika λ adalah nilai *eigen* dari A, maka λ^2 adalah nilai *eigen* dari A^2. Untuk hal yang lebih umum, perlihatkanlah bahwa λ^n adalah nilai *eigen* dari A^n jika n adalah bilangan asli.
12. Dari hasil pada Teorema 7.3 dan soal 10, carilah nilai-nilai *eigen* A^{15} di mana:
   $$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 10 & -1 & -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$
13. Misalkan λ adalah nilai *eigen* dari operator linier $T: V \to V$. Buktikanlah bahwa vektor *eigen* T yang bersesuaian dengan nilai λ merupakan vektor-vektor tak nol di dalam kernel $\lambda I - A$.

7.2 DIAGONALISASI

Telah kita ketahui bahwa matriks diagonal adalah matriks yang entri-entri pada diagonal utamanya tidak sama dengan nol, sedangkan entri-entri lainnya adalah nol. Permasalahan yang timbul adalah bagaimana membentuk suatu matriks diagonal dari matriks persegi yang bukan merupakan matriks diagonal? Inilah yang akan kita bahas pada bagian ini.

Definisi 7.6 *Matriks persegi A dikatakan dapat didiagonalisasi jika terdapat matriks invertibel P sedemikian sehingga $P^{-1}AP$ adalah matriks diagonal.*

Dari Definisi 7.6, jika $P^{-1}AP$ adalah matriks diagonal, maka matriks P dikatakan mendiagonalisasi A.

Teorema 7.7 *Jika A adalah matriks persegi berukuran n x n, maka pernyataan berikut ini adalah ekivalen:*

(i) A dapat didiagonalisasi.

(ii) A mempunyai n buah vektor eigen yang bebas linier.

Bukti. (i) ⇒ (ii) Karena A dapat didiagonalisasi, maka akan terdapat matriks invertibel P. Misalkan matriks P adalah matriks yang berukuran $n \times n$ dengan kolom-kolom $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$, yakni:

$$P = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix}.$$

Dari Definisi 7.6, $P^{-1}AP$ adalah matriks diagonal. Misalkan $P^{-1}AP = D$, di mana D adalah matriks:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh:

$$AP = A\begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\vec{v}_1 & A\vec{v}_2 & \cdots & A\vec{v}_n \end{bmatrix} \tag{7.11}$$

dan:

$$PD = P\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1\vec{v}_1 & \lambda_2\vec{v}_2 & \cdots & \lambda_n\vec{v}_n \end{bmatrix} \tag{7.12}$$

Karena $P^{-1}AP = D$, maka $AP = PD$. Sehingga dari (7.11) dan (7.12) dapat kita peroleh:

$$\begin{bmatrix} A\vec{v}_1 & A\vec{v}_2 & \cdots & A\vec{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1\vec{v}_1 & \lambda_2\vec{v}_2 & \cdots & \lambda_n\vec{v}_n \end{bmatrix} \tag{7.13}$$

Persamaan kolom-kolomnya adalah

$$A\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1,\ A\vec{v}_2 = \lambda_2\vec{v}_2,\ \ldots,\ A\vec{v}_n = \lambda_n\vec{v}_1 \tag{7.14}$$

Karena P adalah invertibel, maka kolom-kolom $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ adalah bebas linier. Begitu pula kolom-kolomnya dari P adalah tak nol. Dengan Definisi 7.1, dapat disimpulkan bahwa pada persamaan (7.14), nilai $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ adalah nilai-nilai *eigen* dari A dan $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ adalah vektor *eigen* yang bersesuaian dengan nilai *eigen*.

(ii)⇒(i) misalkan terdapat vektor-vektor *eigen* $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ dan gunakan untuk sebagai kolom-kolom dari matriks P. Dan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, gunakanlah sebagai diagonal dari matriks D. Dari persamaan (7.11)-(7.13) diperoleh $AP = PD$. Karena vektor-vektor kolom P adalah bebas linier, maka P dapat dibalik. Hal ini mengakibatkan $P^{-1}AP = D$. Oleh karena itu A dapat didiagonalisasi. Bukti selengkapnya diberikan kepada pembaca sebagai latihan. ■

Beberapa langkah yang dapat digunakan untuk mendiagonalisasi sebuah matriks persegi A, yakni:

(1) Tentukan nilai-nilai *eigen* dari A.

(2) Tentukan vektor-vektor *eigen* yang bersesuaian nilai-nilai *eigen* yang diperoleh pada langkah 1.

(3) Bentuklah sebuah matriks P yang kolom-kolomnya adalah vektor-vektor *eigen* yang diperoleh pada langkah 2.

(4) Bentuklah sebuah matriks D, di mana $D = P^{-1}AP$ yang entri-entrinya merupakan nilai-nilai *eigen* pada langkah 1.

Contoh 7.11 Tentukanlah matriks P yang mendiagonalkan:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Dari Contoh 7.8, telah diperoleh nilai-nilai eigennya yaitu $\lambda = 1$ dan $\lambda = 5$. Serta dari contoh tersebut vektor:

$$p_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Merupakan basis untuk ruang *eigen* yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$ dan vektor-vektor:

$$p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{dan } p_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Membentuk basis untuk ruang *eigen* yang bersesuaian dengan nilai $\lambda = 5$. Oleh karena itu, matriks persegi P yang kolomnya berupa vektor *eigen* adalah:

$$P=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

akan mendiagonalkan A. Nilai dari $det(P)$= -2, sehingga P merupakan matriks invertibel. Sekarang kita cek apakah $P^{-1}AP = D$:

$$P^{-1}AP=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}.$$

Diperoleh matriks diagonal:

$$D=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}. \quad \square$$

Contoh berikut ini merupakan matriks persegi yang tidak dapat didiagonalisasi.

Contoh 7.12 Tentukanlah matriks P yang mendiagonalkan:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 2\end{bmatrix}.$$

Pertama kita cari terlebih dahulu nilai *eigen* λ dari matriks A. Dengan menggunakan serangkaian cara seperti Contoh 7.2, diperoleh:

$$det(\lambda I-A)=det\left(\begin{bmatrix}\lambda-1 & -2 & -2\\ 0 & \lambda-2 & -1\\ 1 & -2 & \lambda-2\end{bmatrix}\right)$$

$$=(x-1)(x-2)^2$$

Persamaan karakteristiknya adalah:

$$(x-1)(x-2)^2,$$

dan nilai karakteristiknya adalah $\lambda = 1$ dan $\lambda = 2$. Vektor eigennya adalah penyelesaian dari persamaan:

$$\begin{bmatrix}\lambda-1 & -2 & -2\\ 0 & \lambda-2 & -1\\ 1 & -2 & \lambda-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}.$$

Untuk $\lambda = 1$, persamaan tersebut menjadi:

$$\begin{bmatrix}0 & -2 & -2\\ 0 & -1 & -1\\ 1 & -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}.$$

Penyelesaiannya adalah $x_1 = -s$, $x_2 = -s$, dan $x_3 = s$. Sehingga vektor eigennya adalah:

$$\vec{x}=\begin{bmatrix}-s\\ -s\\ s\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{bmatrix}$$

Kita peroleh vektor eigennya $p_1 = (-1, -1, 1)^T$. Selanjutnya untuk $\lambda = 2$, persamaannya adalah:

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & -2\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}.$$

Penyelesaiannya adalah $x_1 = 2s$, $x_2 = s$, dan $x_3 = 0$. Sehingga vektor *eigen*-nya adalah:

$$\vec{x}=\begin{bmatrix}2s\\ s\\ 0\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$$

Kita peroleh vektor eigennya $p_2 = (2, 1, 0)^T$. Karena basis-basis dari ruang eigennya adalah $\{p_1, p_2\}$ berdimensi 2 dan matriks P harus berdimensi 3, maka A tidak mempunyai tiga buah vektor *eigen* yang bebas linier. Oleh karena itu, A tidak dapat didiagonalisasi.

Contoh 7.13 Misalkan $T: R^3 \to R^3$ adalah operator linier yang didefinisikan oleh:

$$T\left(\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-x_2+x_3\\ -x_1+x_3\\ x_1+x_2\end{bmatrix}$$

Carilah basis untuk R^3 yang relatif terhadap matriks T diagonal.
Kita tinjau basis baku $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ untuk R^3, sehingga:

$$T(e_1)=T\left(\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\ -1\\ 1\end{bmatrix},\ T(e_2)=T\left(\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{bmatrix},\ \text{dan } T(e_3)=T\left(\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$$

Sehingga matriks $[T]_B$ (matriks T yang relatif terhadap basis B) adalah:

$$[T]_B=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Persamaan karakteristiknya adalah:

$$(\lambda - 1)^2 (\lambda + 2) = 0 \text{ (Buktikan)}$$

Nilai-nilai *eigen* dari $[T]_B$ adalah $\lambda = 1$ dan $\lambda = -2$. Untuk nilai $\lambda = 1$, penyelesaian dari sistem:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

adalah $x_1 = -s + t$, $x_2 = s$, dan $x_3 = t$. Sehingga vektor eigennya adalah:

$$\vec{x}=\begin{bmatrix} -s+t \\ s \\ t \end{bmatrix}=s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dan vektor:

$$u_1=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{dan } u_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

bebas linier, sehingga merupakan basis untuk ruang *eigen* yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$. Dengan serangkaian cara yang sama, untuk $\lambda = 2$ diperoleh vektor:

$$u_3=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Misalkan P adalah matriks yang terdiri atas vektor-vektor *eigen* pada setiap kolomnya, yakni:

$$P=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Sekarang kita cek apakah $P^{-1}[T]_B P = D$.

$$P^{-1}[T]_B P=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Karena $P^{-1}[T]_B P$ adalah matriks diagonal, maka basis:

$$B'=\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$$

akan menghasilkan sebuah matriks diagonal dari $[T]_{B'}$. □

Teorema 7.8 *Sebuah matriks yang berukuran n x n dengan n buah nilai eigen yang berbeda dapat didiagonalisasi.*

Bukti diserahkan kepada pembaca sebagai latihan. Gunakan Definisi 7.6 dan Teorema 7.7, serta Definisi 5.17 pada Bab 5.

Contoh 7.14 Matriks pada Contoh 7.4 yakni:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

mempunyai dua buah nilai *eigen*, yaitu $\lambda = -4$ dan $\lambda = 4$. Teorema 7.8 menjamin bahwa A dapat didiagonalisasi. Vektor *eigen* untuk $\lambda = -4$ adalah:

$$\vec{x}=s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dan vektor *eigen* untuk $\lambda = 4$ adalah:

$$\vec{x}=s\begin{bmatrix} -7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga matriks:

$$P=\begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya:

$$P^{-1}AP=\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Hasil $P^{-1}AP$ telah sesuai dengan Teorema 7.8. □

Namun Teorema 7.8 menjadi tidak berlaku apabila matriks A adalah matriks diagonal yang mempunyai beberapa nilai *eigen* yang sama. Perhatikan contoh berikut.

Contoh 7.15 Misalkan matriks persegi

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan Teorema 7.3, nilai-nilai eigennya adalah $\lambda = 1$ dan $\lambda = -2$. Basis untuk ruang *eigen* yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$ adalah:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{dan} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kemudian basis untuk ruang *eigen* yang bersesuaian dengan $\lambda = -2$ adalah:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dapat dilihat bahwa basisnya merupakan basis baku untuk R^3. Oleh karena itu matriks $P = I$, sehingga:

$$P^{-1}AP = A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad \square$$

LATIHAN 7.2

1. Manakah dari matriks persegi di bawah ini yang dapat didiagonalisasi?

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

2. Carilah matriks *P* yang mendiagonalisasi matriks *A*, kemudian tentukanlah $P^{-1}AP$.

(a) $\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -8 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

3. Misalkan $T: R^3 \to R^3$ adalah operator linier yang didefinisikan sebagai:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x+2y \\ 2x+2y \\ z \end{bmatrix}$$

Carilah basis untuk R^3 yang relatif terhadap matriks *T* diagonal.

4. Misalkan $T: P_2 \to P_2$ adalah operator linier yang didefinisikan sebagai

$$T(a + bx + cx^2) = c - b + (c - a)x + (A + B)x^2.$$

Carilah basis untul P_2 yang relatif terhadap matrik *T* diagonal.

5. Berikanlah sebuah contoh matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, sehingga A mempu-nyai nilai-nilai *eigen* riil dan matriks $I + A$ tidak dapat didiagonalisasi.

6. Diketahui $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ b & -3 \end{bmatrix}$. Tentukan nilai $b \in R$, agar *A* mempunyai nilai *eigen* riil dan A tidak dapat didiagonalkan.

7. Misalkan *A* adalah matriks yang berukuran *n x n* dan *P* adalah matriks invertibel yang berukuran *n x n*. Buktikan bahwa:

(a) $(P^{-1}AP)^2 = P^{-1}A^2P$.

(b) $(p^{-1}AP^r = P^{-1}A^rP$, di mana *r* adalah bilangan asli.

(c) $A^r = PD^rP^{-1}$, di mana *D* adalah matriks diagonal dari *A* atau $D = P^{-1}AP$.

8. Diketahui matriks:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan rumus pada soal nomor 8 (c), carilah A^{20}, A^{100}, dan A^{2016}.

9. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} q & 0 \\ p & q \end{bmatrix}$, $p, q \in R$. Buktikanlah jika $p \neq 0$, maka *A* tidak dapat didiagonalisasi.

10. Buktikan Teorema 7.8.

11. Misalkan G operator linier pada R^{2x2} yang memetakan $A \in R^{2x2}$ ke $G(A) = A^T$, di mana A^T adalah transpose dari *A*. Periksalah apakah *G* dapat didiagonalkan. Jika ya, berikan suatu diagonalisasi dari *G*. (R^{2x2} adalah himpunan semua matriks riil berukuran yang 2 x 2).

7.3 DIAGONALISASI ORTOGONAL

Sebelum kita bahas lebih dalam mengenai diagonalisasi ortogonal, terlebih dahulu kita ketahui tentang ruang hasil kali dalam dan basis ortonormal.

Definisi 7.9 *Sebuah hasil kali dalam (inner product) pada ruang vektor riil V adalah fungsi yang mengasosiasikan (menghubungkan) bilangan riil* $\langle \vec{u}\ \vec{v} \rangle$ *dengan setiap pasangan vektor* $\vec{u}$ *dan* $\vec{v}$ *di dalam V sehingga aksioma-aksioma berikut ini terpenuhi untuk vektor* $\vec{u}$, $\vec{v}$, *dan* $\vec{w}$ *di V serta untuk semua skalar k.*

(i) $\langle \vec{u}, \vec{v} = \vec{v}, \vec{u} \rangle$ *(aksioma simetris)*

(ii) $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} = \vec{u}, \vec{v} + \vec{u}, \vec{w} \rangle$ *(aksioma aditivitas)*

(iii) $\langle k\vec{u}, \vec{v} \quad k\vec{u}, \vec{v} \rangle$ *(aksioma homogenitas)*

(iv) $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq 0$ *dan* $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$ *jika dan hanya jika* $\vec{v} = \vec{0}$. *(aksioma positivitas)*

Misalkan $\vec{u} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ dan $\vec{v} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$, di mana $\vec{u}, \vec{v} \in R^n$. Pada bagian 5.2.1 telah kita ketahui bahwa:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \vec{u}_1.\vec{v}_1 + \vec{u}_2.\vec{v}_2 + \cdots + \vec{u}_n.\vec{v}_n. \tag{7.15}$$

Bentuk (7.15) dinamakan hasil kali dalam ruang-*n* Euclidean. Apabila setiap vektor dinyatakan dalam bentuk matriks kolom, bentuk (7.15) dapat dituliskan sebagai:

$$\vec{u}, \vec{v} = A^T B$$

di mana A adalah matriks yang dibentuk oleh $\vec{u}$ dan B adalah matriks yang dibentuk oleh $\vec{v}$. Ruang vektor yang di dalamnya memuat hasil kali dalam dinamakan ruang hasil kali dalam.

Contoh 7.16. Diketahui $\vec{u} = (3,-5,1)$ dan $\vec{v} = (2,4,-3)$ maka:

$$\langle \vec{u},\vec{v} \rangle = 3(2)+(-5)(4)+1(-3) = -17,$$

dan:

$$\langle \vec{v},\vec{u} \rangle = 2(3)+4(-5)+(-3)(1) = -17.$$

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$, diperoleh:

$$\vec{u},\vec{v} = A^T B = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} = -17.$$ □

Contoh 7.17 Misalkan $\vec{u} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ dan $\vec{v} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ adalah vektor-vektor di R^2. Perlihatkanlah bahwa hasil kali dalam berbentuk:

$$\langle \vec{u},\vec{v} \rangle = 2\vec{u}_1.\vec{v}_1 + 5\vec{u}_2.\vec{v}_2$$

dapat memenuhi keempat aksioma hasil kali dalam.

Misalkan $\vec{u},\vec{v},\vec{w} \in R^2$, kita peroleh:

(1) $\vec{u},\vec{v} = 2\vec{u}_1.\vec{v}_1 + 5\vec{u}_2.\vec{v}_2$
$= 2\vec{v}_1.\vec{u}_1 + 5\vec{v}_2.\vec{u}_2$
$= \vec{v},\vec{u}$ (Aksioma (i) terpenuhi)

(2) $\langle \vec{u}+\vec{v},\vec{w} \rangle = \langle (\vec{u}_1+\vec{v}_1, \vec{u}_2+\vec{v}_2),(\vec{w}_1,\vec{w}_2) \rangle$
$= 2(\vec{u}_1+\vec{v}_1)\vec{w}_1 + 5(\vec{u}_2+\vec{v}_2)\vec{w}_2$
$= (2\vec{u}_1.\vec{w}_1 + 5\vec{u}_2\vec{w}_2) + (2\vec{v}_1.\vec{w}_1 + 5\vec{v}_2.\vec{w}_2)$
$= \vec{u},\vec{w} + \vec{v},\vec{w}$ (*Aksioma* (ii) terpenuhi)

(3) $\langle k\vec{u},\vec{v} \rangle = \langle (k\vec{u}_1, k\vec{u}_2),(\vec{v}_1,\vec{v}_2) \rangle$
$= 2(k\vec{u}_1)\vec{v}_1 + 5(k\vec{u}_2)\vec{v}_2$
$= k(2\vec{u}_1.\vec{v}_1 + 5\vec{u}_2.\vec{v}_2)$
$= k\vec{u},\vec{v}$ (Aksioma (iii) terpenuhi)

(4) $\langle \vec{v},\vec{v} \rangle = 2\vec{v}_1.\vec{v}_1 + 5\vec{v}_2.\vec{v}_2 = 2\vec{v}_1^2 + 5\vec{v}_2^2 \geq 0$, karena kuadrat dari bilangan riil adalah bilangan rill tak negatif. Selanjutnya $\langle \vec{v},\vec{0} \rangle = 0$ jika dan hanya jika $\vec{v} = 0$. (Aksioma (iv) terpenuhi) □

Definisi 7.10 dan 7.11 masing-masing merupakan definisi tentang ortogonal dan ortonormal.

Definisi 7.10 *Dua vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ disebut ortogonal apabila $\langle \vec{v},\vec{0} \rangle = 0$.*

Definisi 7.11 *Himpunan $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ disebut sebagai himpunan ortonormal jika $\|\vec{v}_i\| = 1$, $i = 1,2,\ldots,n$ dan untuk setiap dua buah vektor $\vec{v}_i, \vec{v}_j \in B$ dengan $i \neq j$ adalah ortogonal atau dapat dituliskan $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = 0$.*

Contoh 7.18. Diketahui vektor-vektor di R^3 yakni:

$$\vec{v}_1 = (0,0,-1), \vec{v}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \text{ dan } \vec{v}_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

Misalkan $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$. Hasil kali dalam dari setiap dua vektor berbeda di S adalah:

$$\langle \vec{v}_1,\vec{v}_2 \rangle = \langle \vec{v}_1,\vec{v}_3 \rangle = \langle \vec{v}_2,\vec{v}_3 \rangle = 0.$$

Terlihat bahwa untuk dua buah vektor yang berbeda adalah ortogonal. Selanjutnya, kita cari norma dari masing-masing vektor di S.

$$\|\vec{v}_1\| = \|\vec{v}_2\| = \|\vec{v}_3\| = 1.$$

Karena untuk setiap dua buah vektor berbeda di adalah ortogonal dan norma dari masing-masing vektor di S adalah 1, dapat kita simpulkan bahwa adalah ortonormal. □

Pada Contoh 7.18, andaikan $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ adalah sebuah basis, maka dinamakan sebagai basis ortonormal.

Misalkan $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ adalah sembarang basis untuk R^n yang bukan ortonormal. Persoalan yang timbul adalah bagaimana mengubah basis B menjadi sebuah basis ortonormal? Cara yang dapat digunakan untuk mentransformasikannya dinamakan proses Gram-Schmidt. Dalam proses Gram-Schmidt perlu diketahui bahwa notasi:

$$proy_w \vec{u}_1$$

menyatakan proyeksi ortogonal $\vec{u}_1$ pada ruang w, di mana $\vec{u}_1 \in B$.

Misalkan $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ adalah sembarang basis untuk V dan $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ adalah basis ortonormal untuk V. Langkah-langkah yang dapat dilakukan dalam proses Gram-Schmidt adalah:

(1) Misalkan $\vec{v}_1 = \dfrac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}$ merupakan vektor ortonormal yang dihasilkan dari $\vec{u}_1$.

(2) Carilah $\vec{v}_2 = \dfrac{\vec{u}_2 - proy_{w_1}\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2 - proy_{w_1}\vec{u}_2\|} = \dfrac{\vec{u}_2 - \langle \vec{u}_2,\vec{v}_1 \rangle \vec{v}_1}{\|\vec{u}_2 - \langle \vec{u}_2,\vec{v}_1 \rangle \vec{v}_1\|}$

(3) Carilah $\vec{v}_3 = \dfrac{\vec{u}_3 - proy_{w_2}\vec{u}_3}{\|\vec{u}_3 - proy_{w_2}\vec{u}_3\|} = \dfrac{\vec{u}_3 - \langle \vec{u}_3,\vec{v}_1 \rangle \vec{v}_1 - \langle \vec{u}_3,\vec{v}_2 \rangle \vec{v}_2}{\|\vec{u}_3 - \langle \vec{u}_3,\vec{v}_1 \rangle \vec{v}_1 - \langle \vec{u}_3,\vec{v}_2 \rangle \vec{v}_2\|}$

(4) Carilah $\vec{v}_4 = \dfrac{\vec{u}_4 - proy_{w_3}\vec{u}_4}{\|\vec{u}_4 - proy_{w_3}\vec{u}_4\|} = \dfrac{\vec{u}_4 - \langle \vec{u}_4,\vec{v}_1\rangle \vec{v}_1 - \langle \vec{u}_4,\vec{v}_2\rangle \vec{v}_2 - \langle \vec{u}_4,\vec{v}_3\rangle \vec{v}_3}{\|\vec{u}_4 - \langle \vec{u}_4,\vec{v}_1\rangle \vec{v}_1 - \langle \vec{u}_4,\vec{v}_2\rangle \vec{v}_2 - \langle \vec{u}_4,\vec{v}_3\rangle \vec{v}_3\|}$

(5) Lakukan cara serupa untuk mencari $\vec{v}_i$, $i = 5,6,\ldots,n$

Contoh 7.19 Misalkan diketahui basis $\vec{u}_1 = (-1,1,0)$, $\vec{u}_2 = (1,1,0)$ dan $\vec{u}_3 = (0,0,-1)$ untuk ruang R^3. Terapkanlah proses Gram-Schmidt untuk mentransformasikan himpunan $B = \{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ ke dalam basis ortonormal.

Langkah 1: $\vec{v}_1 = \dfrac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|} = \dfrac{(-1,1,0)}{\sqrt{2}} = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right)$.

Langkah 2: $\vec{u}_2 - proy_{w_1}\vec{u}_2 = \vec{u}_2 - \langle \vec{u}_2,\vec{v}_1\rangle \vec{v}_1$

$$= (1,1,0) - (0)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$$

$$= (0,1,1)$$

Sehingga: $\vec{v}_2 = \dfrac{\vec{u}_2 - proy_{w_1}\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2 - proy_{w_1}\vec{u}_2\|} = \dfrac{(1,1,0)}{\sqrt{2}} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right)$.

Langkah 3: $\vec{u}_3 - proy_{w_2}\vec{u}_3 = \vec{u}_3 - \langle \vec{u}_3,\vec{v}_1\rangle \vec{v}_1 - \langle \vec{u}_3,\vec{v}_2\rangle \vec{v}_2$

$$= (0,0,1) - (0)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right) - (0)\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$$

$$= (0,0,1)$$

Sehingga: $\vec{v}_3 = \dfrac{\vec{u}_3 - proy_{w_2}\vec{u}_3}{\|\vec{u}_3 - proy_{w_2}\vec{u}_3\|} = \dfrac{(0,0,1)}{1} = (0,0,1)$

Oleh karena itu, $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ membentuk basis ortonormal untuk R^3.

Selanjutnya kita beralih kepada persoalan diagonalisasi ortogonal. Berikut ini diberikan definisi tentang diagonalisasi ortogonal.

Definisi 7.12 *Matriks persegi A dikatakan dapat didiagonalisasi secara ortogonal jika terdapat matriks P yang ortogonal sehingga:*

$$P^{-1}AP = P^{T}AP$$

adalah diagonal. Matriks P yang demikian dikatakan mendiagonalisasi A secara ortogonal.

Dalam teorema berikut ini, terdapat persyaratan bagi sebuah matriks persegi yang dapat didiagonalisasi secara ortogonal.

Teorema 7.13 *Jika A adalah matriks berukuran n x n, maka pernyataan-pernyataan berikut ini adalah ekivalen.*

(i) A dapat didiagonalisasi secara ortogonal.
(ii) A mempunyai himpunan ortonormal dari vektor eigennya.
(iii) A adalah simetris.

Bukti diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

Di dalam Teorema 7.13 telah jelas dinyatakan bahwa matriks persegi yang dapat didiagonalisasi secara ortogonal adalah matriks simetris. Permasalahannya sekarang adalah bagaimana mencari matriks P yang ortogonal sehingga $P^{-1}AP = P^{T}AP$ adalah diagonal? Berikut ini diberikan prosedur pencariannya.

Misalkan A adalah matriks berukuran n x n, matriks P yang ortogonal dapat dicari dengan langkah-langkah berikut.

(1) Carilah nilai-nilai *eigen* riil dari matriks A.
(2) Tentukan basis untuk masing-masing nilai *eigen* yang diperoleh pada langkah (1).
(3) Gunakan proses Gram-Schmidt untuk mencari basis ortonormal dari basis yang diperoleh pada langkah (2).
(4) Bentuklah matriks P yang kolom-kolomnya berupa vektor-vektor basis ortonormal yang diperoleh pada langkah (3).

Contoh 7.20 Carilah matriks ortogonal P yang mendiagonalisasi:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan cara seperti Contoh 7.2, diperoleh nilai *eigen* dari A adalah $\lambda = 7$ dan $\lambda = 1$ (buktikan). Dengan menggunakan cara seperti Contoh 7.8, untuk $\lambda = 7$ diperoleh vektor:

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

membentuk basis untuk ruang *eigen* yang bersesuaian dengan $\lambda = 7$. Dengan menerapkan proses Gram-Schmidt terhadap $\{\vec{u}_1\}$, maka akan diperoleh:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

Untuk $\lambda = 1$, diperoleh vektor-vektor:

$$\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \text{dan } \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

membentuk basis untuk ruang *eigen* yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$. Dengan menerapkan proses Gram-Schmidt terhadap $\{\vec{u}_2, \vec{u}_3\}$, maka akan diperoleh:

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \text{dan } \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya, gunakan $\vec{v}_1, \vec{v}_2$, dan $\vec{v}_3$ sebagai vektor-vektor kolom matriks *P*, yakni:

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Sekarang kita periksa $P^T AP$, yakni:

$$P^T AP = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Oleh karena itu, *P* mendiagonalisasi *A* secara ortogonal. □

LATIHAN 7.3

1. Diketahui $\vec{u}_1 = (3,1,-2)$, $\vec{u}_2 = (-1,0,4)$, dan $\vec{u}_3 = (5,-4,2)$. Tentukanlah:
   (a) $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$ (c) $\langle \vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{u}_3 \rangle$
   (b) $\langle \vec{u}_3, \vec{u}_1 \rangle$ (d) $\langle \vec{u}_1 + 2\vec{u}_2, 3\vec{u}_3 \rangle$
2. Misalkan $\vec{u} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ dan $\vec{v} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ adalah vektor-vektor di R^2. Perlihatkanlah bahwa hasil kali dalam berikut ini memenuhi keempat aksioma hasil kali dalam:
   (a) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 2\vec{u}_1\vec{v}_1 + 4\vec{u}_2\vec{v}_2$
   (b) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 2\vec{u}_1\vec{v}_1 - 4\vec{u}_2\vec{v}_2$
3. Misalkan $p = p(x)$ dan $q = q(x)$ adalah polinomial pada P_2. Perlihatkan bahwa:
$$\langle \text{p,q} \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$$
   adalah hasil kali dalam pada P_2.
4. Manakah dari himpunan berikut ini yang membentuk himpunan ortonormal?
   (a) $\{(-1,0),(0,-1)\} \in R^2$
   (b) $\{(-1,0),(0,3)\} \in R^2$
   (c) $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), (0,0,-1)\right\} \in R^3$

   (d) $\left\{\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\} \in R^3$
   (e) $\{1, x, x^2\} \in P_2$
   (f) $\left\{\frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}}x - \frac{4}{3\sqrt{2}}x^2,\ \frac{2}{3} + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x^2,\ \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}x\right\} \in P_2$
5. Gunakanlah proses Gram-Schmidt untuk mentransformasikan basis *B* berikut ini ke dalam basis ortonormal.
   (a) B = {(2,1), (1,-1)} di R^2
   (b) B = {(1,1,-1), (2,0,3), (-2,1,-2)} di R^3
   (c) B = {(1,0,1,1), (-1,2,1,0), (2,1,0,-1)} di R^4
6. Carilah matriks *P* ortogonal yang mendiagonalisasi *A*. Kemudian tentukanlah $P^{-1}AP$.
   (a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (d) $A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$
   (b) $A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ (e) $A = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 1 \\ -1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & -5 \end{bmatrix}$
   (c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (f) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$
7. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ -1 & 1 \\ b & 1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} c & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Carilah nilai riil *a*, *b*, dan *c* agar matriks *AB* dapat didiagonalisasi secara ortogonal.
8. Buktikanlah bahwa *A* adalah matriks diagonal berukuran *n x n* atau
$$A = diag(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}),$$
   jika dan hanya jika matriks *P* ortogonal yang mendiagonalisasi *A* merupakan matriks identitasnya.
9. Asumsikan $q \neq 0$. Tentukan sebuah matriks yang mendiagonalisasi secara ortogonal.
$$\begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix}$$
10. Buktikanlah (i) ⇒ (ii), (i) ⇒ (ii), dan (i) ⇒ (iii) pada Teorema 7.13.
11. Perlihatkan bahwa jika *A* adalah matriks simetris yang ortogonal, maka nilai-nilai eigennya hanya 1 dan -1.

7.4. NILAI EIGEN DAN DIAGONALISASI DENGAN MATLAB

Pada bagian ini akan kita bahas mengenai pencarian nilai *eigen* dan vektor *eigen*, serta diagonalisasi dengan menggunakan Matlab. Misalkan A adalah sebuah matriks persegi. Nilai *eigen* dari A dapat dicari dengan menggunakan perintah " *eig(A)* ".

Contoh 7.21 Carilah nilai *eigen* dari matriks:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & -3\end{bmatrix}$$

Pertama, input matriks A yakni:

```
>> A=[2 0; 1 -3];
```

Nilai *eigen* dari matriks A adalah:

```
>> eig(A)
ans =
     -3
      2
```

Untuk mencari vektor *eigen* dari matriks A, kita dapat menggunakan perintah "*[X,Y]=eig(A)*". Di mana X merupakan matriks yang kolom-kolomnya berupa vektor *eigen* dan Y merupakan matriks diagonal yang diagonal utamanya berupa nilai-nilai eigennya.

Contoh 7.22. Dari matriks pada Contoh 7.21, akan dicari nilai *eigen* dan vektor eigennya yakni:

```
>> A=[2 0; 1 -3];
>> [X,Y]=eig(A)
X =
          0    0.9806
     1.0000    0.1961
Y =
    -3     0
     0     2
```

□

Selanjutnya kita bahas tentang cara mencari matriks diagonal dari matriks persegi A. Setelah kita peroleh nilai *eigen* Y dan vektor *eigen* X, gunakan perintah "*inv(X)*A*X*" untuk mencari matriks diagonal dari matriks A.

Contoh 7.23 Dari matriks pada Contoh 7.21, akan dicari matriks diagonalnya yakni:

```
>> A=[2 0; 1 -3];
>> [x,y]=eig(A);
>> inv(x)*A*x
ans =
   -3.0000   -0.0000
         0    2.0000
```


LATIHAN 7.4

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan menggunakan Matlab.

1. Buatlah empat buah matriks persegi berukuran 8 x 8. Kemudian carilah nilai *eigen* dan vektor *eigen* dari setiap matriks yang Anda buat.
2. Tentukan basis untuk ruang *eigen* dari matriks yang Anda buat pada soal nomor 1.
3. Tentukan sebuah matriks diagonal D dari matriks pada soal nomor 1, di mana $D = P^{-1}AP$.
4. Diketahui matriks:

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 6 & 10 & 6 & 2 & 4\\ 3 & 7 & -1 & -6 & 1 & 7\\ 5 & -9 & 5 & 7 & 7 & -4\\ 2 & 4 & 8 & -8 & -3 & 5\\ 8 & -3 & -6 & 6 & -8 & 2\\ -7 & 1 & 2 & -9 & 4 & -5\end{bmatrix}$$

(a) Carilah nilai *eigen* dan vektor *eigen* dari A.
(b) Tentukanlah basis untuk ruang *eigen* dari matriks A.
(c) Tentukan matriks $P^{-1}AP$.
(d) Carilah nilai *eigen* dan vektor *eigen* dari A^{20}.
(e) Bandingkan nilai *eigen* pada (a) dengan nilai *eigen* pada (d). Berikan pendapat Anda tentang perbedaan nilai *eigen* dari (a) dan (d).
(f) Buatlah sebuah *source code program* untuk mencari diagonalisasi ortogonal dari matriks A tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H., Rorres, C. 2010. *Elementary Linear Algebra Applications Version. 10th ed.*USA: John Wiley & Sons.

Ayres, F.Jr. 1985. *TeoridanSoal-SoalMatriks. Seri BukuSchaum (Terjemahan).* Jakarta: Erlangga.

Bapat, R.B. 2012. *Linear Algebra and Linear Models. 3rd ed.* London: Springer.

Bellman, R. 1997. *Introduction to Matrix Analysis. 2nd ed.* Philadelpia: SIAM.

Bernstein, D.S. 2009. *Matrix Mathematics.* New Jersey: Princeton University Press.

Hoffman, K., Kunze, R. 1971. *Linear Algebra. 2nded.* New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Kostrikin, A.I., Manin, Y.I. 1997. *Linear Algebra and Geometry (Volume I).* Netherland: Gordon and Breach Science Publishers.

Lancaster, P., Tismenetsky. M. 1985. *The Theory of Matrices. 2nd ed.* London: Academic Press.

Leon, S.J. 2010. *Linear Algebra with Applications.* 8th ed. USA: Pearson.

Roman, S. 2008. *Advanced Linear Algebra. 3rd ed.* London: Springer.

Strang, G. 2003. *Introduction to Linear Algebra. 3rd ed.* USA: Wellesley-Cambridge Press.

Ayres, F. 1985. *TeoridanSoal-SoalMatriks. Seri BukuSchaum (Terjemahan).* Jakarta: Erlangga.

Adiwijaya. 2014. *AplikasiMatriksdanRuangVektor.* Yogyakarta: GrahaIlmu.

Mursita, D. 2010. *Aljabar Linier.* Bandung: RekayasaSains.

Lang, S. 2004. *Linear Algebra. 3rd ed.* London: Springer.

Kolman, B., Hill, D.R. 2008. *Elementary Linear Algebra with Applications. 9thed.* New Jersey: Pearson.

Meyer, C.D. 2000. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra.* Philadelpia: SIAM.

Shores, T.S. 2007. *Applied Linear Algebra and Matrix Analysis.* London: Springer.

PARA PENULIS

Ismail Husein, M.Si., lahir di Kota Padangsidempuan pada tanggal 22 April 1991. Setelah lulus S-2 dari SMAN 2 Padangsidempuan, beliau melanjutkan pendidikan di IAIN Padangsidempuan dan tamat tahun 2013. Pada tahun 2015, beliau menyelesaikan S-2 pada tahun 2015 di Universitas Sumatra Utara. Sehari setelah wisuda S-2 magister, beliau diterima menjadi dosen tetap di Universitas Islam Negeri Sumatra Utara Medan. Sekarang beliau sedang menjalani program doktor di Universitas Sumatra Utara. Beliau juga aktif menulis di berbagai jurnal dan menjadi editor di berbagai jurnal. Beberapa buku beliau yang sudah terbit yaitu: *Aljabar Linier Dasar dan Aplikasinya*; *Filsafat Sains*; *Pengantar Matriks*. Beliau juga aktif di berbagai organisasi sejak menjadi mahasiswa, pernah menjadi Ketua SEMA (2011) dan juga pernah menjabat Ketua HMI Cab. Padangsidempuan (2012) serta menjadi pengurus di berbagai organisasi nasional.

Dr. Rina Filia Sari, M.Si. adalah anak pertama dari pasangan Masri dan Fildaiti. Penulis lahir di Bukittinggi, Sumatra Barat, pada tanggal 1 Maret 1977 dan mengikuti pendidikan dasar, menengah pertama, dan menengah atas di Bukittinggi. Menyelesaikan program sarjana di jurusan Matematika FMIPA USU pada akhir tahun 2000. Penulis memperoleh gelar magister pada tahun 2011 yang dibiayai melalui BPPS DIKTI dan gelar doktor pada tahun 2016 dari Program Studi Matematika USU. Menikah dengan Prabudi Nasution, dikarunia satu orang anak, Brian Dzaki Nasution. Saat ini penulis adalah staf pengajar pada program studi matematika Universitas Islam Negeri Sumatra Utara Medan.

Hari Sumardi, M.Si., lahir di Meranti, 18 Mei 1989. Memperoleh gelar Sarjana Pendidikan pada Jurusan Pendidikan Matematika FKIP Universitas Asahan tahun 2012. Kemudian di tahun 2014 memperoleh gelar magister sains pada jurusan Matematika FMIPA Universitas Sumatra Utara. Tahun 2014 menjadi Dosen Pendidikan Matematika di Universitas Asahan. Penulis aktif dalam membimbing Olimpiade Matematika dan Komputer untuk siswa SD, SMP, dan SMA, serta Mahasiswa. Selain itu, penulis juga aktif dalam melakukan penelitian dengan fokus pada Teori Graf. Pada awal tahun 2015 hingga sekarang, penulis sedang melanjutkan studi pada Program Doktor Ilmu Matematika FMIPA Universitas Sumatra Utara.

MATRIKS & TRANSFORMASI LINIER

Dalam kehidupan sehari-hari kita sering berhadapan dengan persoalan yang apabila kita telusuri ternyata merupakan masalah matematika. Dengan mengubahnya kedalam bahasa atau persamaan matematika maka persoalan tersebut lebih mudah diselesaikan. Tetapi terkadang suatu persoalan sering kali memuat lebih dari dua persamaan dan beberapa variabel, sehingga kita mengalami kesulitan untuk mencari hubungan antara variabel-variabelnya.

Buku ini bertujuan membahas secara sederhana mengenai matriks dan transformasi linier. Dengan penyajian bahasa yang mudah dipahami, sehingga mahasiswa diharapkan mampu berakselarasi dalam mengerjakan soal. Di samping itu, di dalamnya juga dilengkapi dengan pengerjaan materi matriks dan transformasi linier dengan menggunakan aplikasi MATLAB, yang sangat jarang disajikan dalam buku lain yang berkenaan dengan matriks. Dengan adanya penyajian dengan aplikasi MATLAB tersebut mahasiswa mampu membuktikan beberapa permasalahan dalam pengerjaan soal mampu membuat algoritma dalam menyelesaikan masalah dalam matriks dan transformasi linier.

Melalui buku ajar ini pembaca akan memperoleh pengetahuan mengenai matriks, sistem persamaan linier, determinan, invers. Selain itu juga dipaparkan materi mengenai ruang vektor, transformasi linier, nilai eigen dan diagonalisasi. Tidak ketinggalan di setiap akhir bab disajikan pula beberapa soal atau latihan bagi siswa.

Diterbitkan Atas Kerja Sama

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUMATRA UTARA-MEDAN

ISBN 978-602-422-070-9

Penerbit
PRENADAMEDIA GROUP
[DIVISI KENCANA]
Email: pmg@prenadamedia.com
http:www.prenadamedia.com